132
ab 17.01.2020

1. Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige **Anordnung** von (bei uns) reellen Zahlen.

Schreibweise: $A, B, C, \ldots, X, \ldots$

Die waagrechten Linien heißen **Zeilen**,
die senkrechten " " **Spalten**.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird als $m \times n$-Matrix bezeichnet.
(„m mal n", „m Kreuz n")

Die einzelnen Elemente einer Matrix werden mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben und zwei Indizes angegeben, die ihre Position bezeichnen.

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \ldots$$

i gibt an, in welcher Zeile und j in welcher Spalte die Zahl steht.

Beispiele: $M = (m_{ij})$ $\quad m_{11} = -3, \; m_{22} = 2$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2×4-Matrix

$m_{12} = 0, \; m_{14} = 8$

$m_{21} = m_{23} = 1$

$i = 1, 2 \; (m)$

$j = 1, 2, 3, 4 \; (n)$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

3×2-Matrix

3×3-Matrix quadratisch

$n_{11} = 1,\ n_{22} = -5$

$p_{11} = 3,\ p_{22} = 4,\ p_{33} = 10$

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ einer Matrix A heißen Hauptdiagonale.

Ist $m = n$, so heißt die Matrix quadratisch.

Spezielle Matrizen:

(1) Eine Matrix, die nur aus Nullen besteht, heißt Nullmatrix.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Analog: eine Nullzeile und eine Nullspalte bestehen ebenfalls nur aus Nullen

$(0, 0, \ldots 0)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) Vertauscht man bei einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ Zeilen und Spalten, so erhält man die zu A „transponierte" Matrix A^t. („A transponiert")

$A^t = (a_{ji})$ ist dann eine $n \times m$-Matrix.

Beispiel: s.o. $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2×4-Matrix

$\Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ 4×2-Matrix

Beim Transponieren bleibt die Hauptdiagonale unverändert.

(3) Eine Matrix mit einer Spalte heißt Vektor („Spaltenvektor").
Transponiert man diesen, so erhält man einen Zeilenvektor.

Beispiel: $\vec{x} = x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow x^t = (5; 3; -7; 0)$
$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$x \in \mathbb{R}^4$

(4) Sind bei einer Matrix $D=(d_{ij})$ alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale 0, so heißt D **Diagonalmatrix**.

$$\left[D=(d_{ij}),\ d_{ij}=0\ (i \neq j) \right]$$

$$\underset{m<n}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & d_{mm} & \end{pmatrix} \quad \text{bzw}$$

$$\underset{m>n}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & d_{nn} \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\underset{n \times n}{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

(5) Insbesondere: Ist $E=(e_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, die eine Diagonalmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale ist, so heißt E **Einheitsmatrix**

$n=2$: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n=3$: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=4$: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usw. $\left(\begin{array}{l} E=(e_{ij}) \\ e_{ii}=1, \\ e_{ij}=0 \ (i \neq j) \end{array} \right)$

(6) Eine Matrix A heißt <u>obere Dreiecks-matrix</u>, falls alle Elemente <u>unterhalb</u> der Hauptdiagonale 0 sind.

$$\underset{m<n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & \cdots \end{pmatrix}$$ bzw

$$\underset{m>n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_{nn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ bzw

$$\underset{m=n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ $\left[\begin{array}{l} A=(a_{ij}) \\ a_{ij}=0 \ (i>j) \end{array} \right]$

(7) Beinahe identisch zur oberen Dreiecksform ist die „Stufenform".
Diese ist so definiert:
Sind in einer Zeile <u>vor</u> der ersten „Nicht-Null" k Nullen, so müssen in der folgenden Zeile <u>mindestens</u> k+1 Nullen <u>vor</u> der ersten „Nicht-Null" kommen.
Ausnahme: Entsteht dabei eine Nullzeile, so müssen auch alle folgenden Zeilen Nullzeilen sein.
Spezialfall: ersetzt man „mindestens" durch „genau", so nennt man die Stufenform <u>regulär</u>

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksform, reguläre Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksform, irreguläre Stufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksform, <u>keine</u> Stufenform

Rechenoperationen:

(1) Addition / Subtraktion

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $m \times n$-Matrizen

$A \underset{(-)}{+} B = C = (c_{ij})$ $m \times n$-Matrix

$a_{ij} \underset{(-)}{+} b_{ij} = c_{ij}$

(2) Skalare Multiplikation

(Zahl mal Matrix = Matrix)

$A = (a_{ij})$ $m \times n$-Matrix

$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$ $m \times n$-Matrix, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\left(\text{Subtraktion: } A - B = A + (-1) \cdot B \right)$

(3) Skalarprodukt

(Zeilenvektor mal Spaltenvektor = Zahl)

$a, b \in \mathbb{R}^n$: $a^t \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$

Beispiele: (1) $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}^4$

$$a^t \cdot b = b^t \cdot a = 3 \cdot 6 + (-7) \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2$$
$$= 18 - 42 + 4 + 16 = -4$$

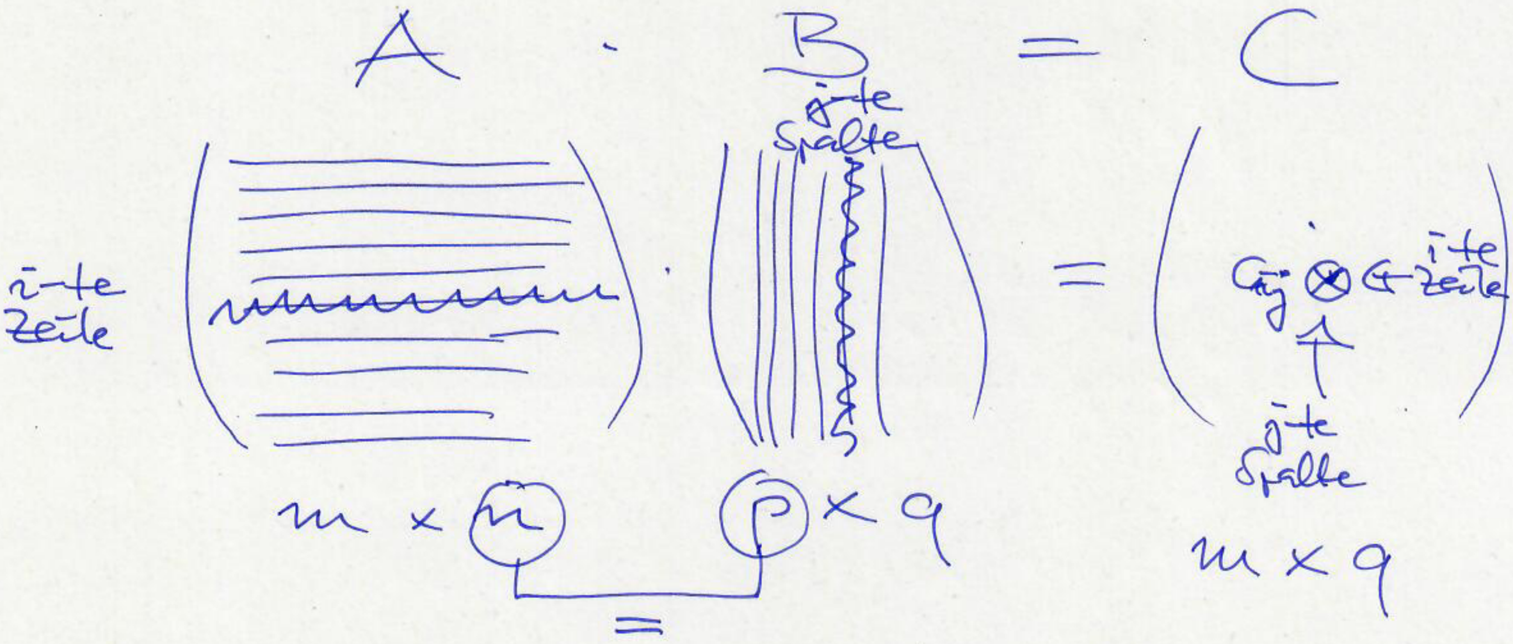
(2) $p = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p, q \in \mathbb{R}^5$

$$p^t \cdot q = q^t \cdot p = 0{,}5 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1$$
$$= 10 + 10 + 12 + 10 + 10 = 52$$

(4) Multiplikation

(Matrix mal Matrix = Matrix)

Schlagwort: „Zeile mal Spalte"



Voraussetzung: $\boxed{n = p}$

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \quad m \times q\text{-Matrix}$$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(s.o.)}$$

2×4-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4×2-Matrix 4×3-Matrix

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 34 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\times\underbrace{4 \quad 4}_{=\ \checkmark}\times 2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 8 & 14 \\ -1 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$4\times\underbrace{2 \quad 2}_{=\ \checkmark}\times 4$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2\times\underbrace{4 \quad 4}_{=\ \checkmark}\times 3$$

$C \cdot A$ existiert nicht

$$4\times\underbrace{3 \quad 2}_{\neq}\times 4$$

Achtung! $A \cdot B \neq B \cdot A$

Es gibt keine Division!

Ersatz dafür: Multiplikation mit der „Inversen"

Statt „$\frac{A}{B}$": $A \cdot B^{-1}$ bzw. $B^{-1} \cdot A$

Potenzen gibt es nur soweit, wie sie sich auf Multiplikationen zurückführen lassen: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$ usw.

Es gibt keine Wurzeln und Logarithmen.

~~Beispiel~~ $\underset{\text{links}}{\underset{\uparrow}{A}} \cdot B + C \cdot \underset{\text{rechts}}{\underset{\uparrow}{A}}$ kann nicht in ein Produkt zerlegt werden

Regeln: (1) $A \cdot E = E \cdot A = A$

(2) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

(1) $A \cdot X = B \quad | \cdot A^{-1}$ von links, falls A^{-1} existiert

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

(2) $X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1}$ von rechts, falls A^{-1} existiert

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

Elementare Umformungen

1. Vertauschen von Zeilen (Spalten)
2. Multiplizieren einer Zeile (Spalte) mit einer Zahl $\neq 0$
3. Addition einer Zeile (Spalte) zu einer anderen

Berechnung einer Inversen mit Hilfe von elementaren <u>Zeilen</u>umformungen:

Schema:

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline \downarrow & \downarrow \\ \hline E & A^{-1} \end{array}$$

identische elementare Zeilenumformungen

Dazu werden schrittweise die einzelnen Spalten diagonalisiert und anschließend durch die Hauptdiagonalelemente dividiert.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A			E			
9	8	7	1	0	0	$\vert\cdot(-2)$
0	1	2	0	1	0	+
6	5	3	0	0	1	$\vert\cdot 3$
9	8	7	1	0	0	+
0	1	2	0	1	0	$\vert\cdot(-8)$
0	−1	−5	−2	0	3	+
9	0	−9	1	−8	0	+
0	1	2	0	1	0	$\vert\cdot 3$ +
0	0	−3	−2	1	3	$\vert\cdot(-3)$ $\vert\cdot 2$
9	0	0	7	−11	−9	$\vert : 9$
0	3	0	−4	5	6	$\vert : 3$
0	0	−3	−2	1	3	$\vert :(-3)$
1	0	0	$7/9$	$-11/9$	-1	
0	1	0	$-4/3$	$5/3$	2	
0	0	1	$2/3$	$-1/3$	-1	
E			A^{-1}			

Statt der letzten Umformung zu E bietet sich besser an, ein Vielfaches von E zu erhalten, und zwar das kgV der Hauptdiagonalelemente in der vorletzten (linken) Matrix.

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
9 & 0 & 0 & 7 & -11 & -9 & \\
0 & 3 & 0 & -4 & 5 & 6 & | \cdot 3 \\
0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 3 & | \cdot (-3) \\
\hline
9 & 0 & 0 & 7 & -11 & -9 & \\
0 & 9 & 0 & -12 & 15 & 18 & \\
0 & 0 & 9 & 6 & -3 & -9 & \\
\hline
 & 9 \cdot E & & & 9 \cdot A^{-1} & &
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -9 \\ -12 & 15 & 18 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}
$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det B = -2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot 4 - 4\cdot 7 = -36$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
 & B & & & E & & \\
\hline
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & |\cdot(-6) \quad |\cdot 2 \\
6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
-2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow + \\
\hline
1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & |\cdot 17 \leftarrow \; + \\
0 & -17 & 7 & -6 & 1 & 0 & |\cdot 3 \quad |\cdot 10 \; + \\
0 & 10 & -2 & 2 & 0 & 1 & |\cdot 17 \leftarrow \\
\hline
17 & 0 & 4 & -1 & 3 & 0 & |\cdot(-9) \leftarrow \; + \\
0 & -17 & 7 & -6 & 1 & 0 & |\,36 \leftarrow \; + \\
0 & 0 & 36 & -26 & 10 & 17 & |(-7) \\
\hline
-9\cdot 17 & 0 & 0 & -17 & -17 & 17 & |\cdot(-4) \quad |:17 \\
0 & -17\cdot 36 & 0 & -34 & -34 & -7\cdot 17 & |:(-17) \\
0 & 0 & 36 & -26 & 10 & 17 & \\
\hline
36 & 0 & 0 & 4 & 4 & -4 & \\
0 & 36 & 0 & 2 & 2 & 7 & \\
0 & 0 & 36 & -26 & 10 & 17 & \\
\hline
 & 36\cdot E & & & 36\cdot B^{-1} & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \\ -26 & 10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 9 & -24 \\ 5 & -1 & 3 \\ -18 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Für $i = 1, 2, \dots, n$:

Die i-te Spalte wird diagonalisiert, indem die i-te Zeile und/oder die zu ändernde Zeile so multipliziert wird, dass die Summe in der i-ten Spalte in der zu ändernden Zeile 0 ergibt. (danach müssen alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale 0 sein) → Diagonalmatrix
Die linke Matrix als Vielfaches von E darstellen (kgV!!).

k Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig genau dann, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination (LK) der übrigen darstellen lässt.

Eine LK ist eine Summe von Vielfachen von Vektoren, z. B. $a, b, c \in \mathbb{R}^5$:

$x = 2a - 3b + \frac{1}{2}c$ ist eine LK von a, b, c.

Um die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen, schreiben wir die Vektoren als Spalten oder Zeilen einer Matrix auf.

Diese Matrix bringen wir mit Hilfe elementarer Umformungen in Stufenform.

Hat die Stufenform genau so viele Nicht-Nullzeilen (NNZ) wie es Vektoren gibt, so sind diese linear unabhängig.

Für $k = 1$ gilt: jeder außer dem Nullvektor ist linear unabhängig

Für $k = 2$ gilt: zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn sie kein Vielfaches voneinander sind

Der <u>Rang</u> einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten.

Dazu bringt man die Matrix in Stufenform.

Die Anzahl der NNZ in der Stufenform ist der Rang dieser Matrix.

Schreibweise: $r(A)$ $[rg(A),\ rk(A)]$

<u>Beispiele:</u> (1)

$a, b, c \in \mathbb{R}^4$: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-3) \\ \\ + \\ + \end{matrix} \quad \text{bzw} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix} = M^t$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid\cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid\cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-3) \\ \cdot 2 + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3 NNZ, 3 Vektoren

$r(M) = 3 = r(M^t)$ a, b, c linear unabhängig

A $m \times n$-Matrix

1. Fall: $m < n$: Spalten sind linear abhängig

$r(A) = m$: Zeilen sind linear unabhängig

$r(A) < m$: Zeilen sind linear abhängig

2. Fall: $m > n$: Zeilen linear abhängig

$r(A) = n$: Spalten linear unabhängig

$r(A) < n$: " " abhängig

3. Fall: $\boxed{m = n}$:

$r(A) = n$: Z./Sp. linear unabhängig

$r(A) < n$: Z./Sp. " abhängig

Beispiel:

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-4) \;|\cdot(-7) \\ \\ \\ \end{matrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \; (< n)$$

Zeilen und Spalten sind linear abhängig