2. DETERMINANTEN

$A = (a_{ij})$ ist eine $n \times n$-Matrix (quadratisch!!)

$n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \det A = |A| = a \cdot d - bc$ heißt Determinante von A.

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 22$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(B) = -19$

$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, $\det(C) = 0$

$n = 3$:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\det(D) = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$+ 7 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 28 - 2 \cdot 16 + 7 \cdot (-10)$$

$$= 112 - 32 - 70 = 10$$

Vorzeichenschema:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots & & & & \\ - & + & - & \cdots & & & & \\ + & - & + & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

<u>Entwicklungssatz von Laplace</u>

(1) Entwicklung nach der i-ten Zeile ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

(2) Entwicklung nach der j-ten Spalte ($j = 1, 2, \ldots, n$)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Dabei ist A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Zeile und j-te Spalte entfernt wird.

Weitere Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \underset{1.Z.}{=} 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot (-7) - 8 \cdot (-12) + 7 \cdot (-6) = -63 + 96 - 42$$

$$= -9$$

einfacher: $\det(A) \underset{2.Z.}{=} -0 \cdot \begin{vmatrix} \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-15) - 2(-3) = -15 + 6$$
$$= -9$$

Eigenschaften:

① Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten) so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

② Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so wird die Determinante α-mal so groß.

Beispiel: A von oben; 2. Zeile mal -10:

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & -10 & -20 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} : \det(A') = -10 \cdot \det(A)$$
$$= -10 \cdot (-9) = 90$$

(3) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

Beispiel: A von oben

$$\det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot \det(A) = 8 \cdot (-9) = -72$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 14 \\ 0 & 2 & 4 \\ 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

(4) $\det(A^t) = \det(A)$

(5) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -9$

$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -9 \\ -12 & 15 & 18 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -\frac{1}{9}$

(6) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B \cdot A)$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = (-9)(-9) = 81$$

(7) Ist $D = (d_{ij})$ eine Diagonalmatrix, dann ist $\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} \cdot \ldots \cdot d_{nn}$.

(8) Ist $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix, dann ist $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Beispiele:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(M_1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) = -30$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 30 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_2) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) = -30$$

(9) $\det(E) = 1$

(10) Addiert man das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

Beispiel: s.o.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(D) = 10$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -10$$

Invertieren mit der Determinante:

$A = (a_{ij})$ $n \times n$-Matrix

$A^{-1} = (x_{ij})$

Dann gilt: $\boxed{x_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})}{\det(A)} \qquad \det(A) \neq 0}$

A_{ji} ist die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A entsteht, wenn die j-te Zeile und i-te Spalte entfernt wird.

Für $n=2$ ergibt sich die einfache Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$ad-bc \neq 0$$

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{s.o.}) \qquad \det(D) = 10$$

26

$$D^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 28 & 23 & -25 \\ -16 & -11 & 15 \\ -10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Hauptsatz: (für $n \times n$-Matrizen)

Die folgenden 5 Aussagen sind äquivalent:

1. Die Zeilen von A sind linear unabh.
2. " Spalten " " " " "
3. $r(A) = n$
4. $\det(A) \neq 0$
5. A^{-1} existiert

3. LGS

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, so heißt

$$\underset{(m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1)}{x} = \underset{m \times 1}{b}$$

ein LGS für $x \in \mathbb{R}^n$.

etwas explizit:

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
\end{aligned}$$

m (lineare) Gleichungen mit n Variablen

Es gibt entweder keine oder genau eine oder ∞-viele Lösungen.

Ist A eine $\underline{n \times n}$-Matrix, d.h. es gibt genauso viele Gleichungen wie Variable, und ist die Lösung <u>eindeutig</u>, so gibt es zwei Spezialverfahren, um das LGS zu lösen: mit Hilfe der inversen Matrix bzw. mit der „Cramerschen Regel"

(1)

$$A \cdot x = b \quad | \cdot A^{-1} \text{ von links, falls } A^{-1} \text{ existiert}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$E \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_2 &= 9 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 9 & -24 \\ 5 & -1 & 3 \\ -18 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

(s.o.) Matrix D

$$x = \begin{pmatrix} -40 & 9 & -24 \\ 5 & -1 & 3 \\ -18 & 4 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+81-96 \\ 25-9+12 \\ -90+36-44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -215 \\ 28 \\ -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(2) „Cramersche Regel":

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dabei ist A_i die $n \times n$-Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Spalte von A durch b ersetzt wird.

im vorherigen Beispiel ergibt sich damit:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 9 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}} \underset{2.Z.}{=} -9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 81 - 296 = -215$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}} \underset{2.Z.}{=} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 37 - 9 = 28$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}} \underset{2.Z.}{=} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \underbrace{-9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{} = -22 - 112 + 36$$

$$= -98 \quad \cancel{-134}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} \underset{2.Z.}{=} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-9) + 8(-1) = 1$$

Ein LGS heißt <u>homogen</u>, falls $b = 0$.

" " " <u>inhomogen</u>, falls $b \neq 0$.

Ein <u>homogenes</u> LGS ist immer lösbar, da $x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.

Das allgemeine Lösungsverfahren geht auf Gauß zurück („Gauß-Algorithmus"). Dieses beruht zum ersten Teil auf dem <u>Additionsverfahren</u> ((A, b) wird in Stufenform gebracht) und zum zweiten Teil auf dem <u>Einsetzungsverfahren</u> (beginnend in der letzten Zeile, endend in der 1-Zeile).

<u>Beispiele</u>:

(1) s.o. $(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ + \end{array} \hat{=}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 1 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-4) \\ \cdot 11 \; + \end{array} \hat{=} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 98 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{x_3 = -98}$

einsetzen: 2. Zeile: $11x_2 + 3\cdot(-98) = 14 \Leftrightarrow 11x_2 = 308 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 28}$

" : 1-Zeile: $-x_1 + 3\cdot 28 + 3\cdot(-98) = 5 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -215}$

$$x = \begin{pmatrix} -215 \\ 28 \\ -98 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 20 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$n = 4$
$r(A) = r(A,b) = 2 = r$
$\Rightarrow n - r = 4 - 2 = 2$

Wir wählen in der 2. Zeile x_4 und x_3 beliebig und lösen dann nach x_2 auf, dann wird in die 1. Zeile eingesetzt und dort nach x_1 aufgelöst.

Wir setzen $\boxed{x_4 = \alpha}$ und $\boxed{x_3 = \beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

2. Zeile: $x_2 - \beta + 2\alpha = 4 \iff \boxed{x_2 = 4 - 2\alpha + \beta}$

In 1. Zeile: $x_1 + 2(4 - 2\alpha + \beta) + 3\beta + 4\alpha = 20$

$\iff \boxed{x_1 = 12 - 5\beta}$

$$x = \begin{pmatrix} 12 - 5\beta \\ 4 - 2\alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{inhomogen}} + \alpha \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{homogen}} + \beta \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{homogen}}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Lösbarkeitskriterium:

$$\boxed{r(A) = r(A,b)}$$, d.h.

Gibt es in A (beim Umformen in Stufenform) eine Nullzeile, so muss diese auch in (A,b) eine Nullzeile sein.

(Es darf nicht gelten $(0 \dots\dots 0 \mid b_i)$ mit $b_i \neq 0$, d.h. $0 \neq b_i$)

Ergänzend zum Gauß-Verfahren:

Ist (A,b) in Stufenform, so ergibt sich folgendes Schema:

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc||c}
\boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & \boxed{a'_{22}} & \dots & \vdots & & & & b_2 \\
0 & 0 & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots\ 0 & \boxed{a'_{rr}} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m
\end{array}\right)
$$

links oben: $r \times r$-Matrix in Stufenform
(i.a. $a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, \dots, a'_{rr} \neq 0$)

links unten, links Mitte: Nullmatrizen

genauer: $m-r$ Nullzeilen

rechts Mitte, rechts oben: egal (irgendwelche Zahlen)

rechts unten: damit $A \cdot x = b$ lösbar ist, müssen $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$ sein.

Dann ist $r(A) = r(A|b) = r$

Die letzte Zeile (= Gleichung) mit Informationsgehalt ($\neq$ Nullzeile) hat die wenigsten Variablen. Dies ist die r-te Zeile.
Dort beginnt man mit dem Lösen.
Also muss man zunächst wissen, wie viele Variable diese r-te Zeile (noch) enthält.
Da in der r-ten Zeile $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ eliminiert wurden gibt es dort noch $n-(r-1)$ $= n-r+1$ Variable.
Da man in einer Gleichung immer alle Variable bis auf eine frei/beliebig wählen kann, sind also $n-r$ Variable frei/beliebig wählbar.

Die allgemeine Lösung enthält dann $n-r$ Parameter.

Homogenes LGS:

Es gilt: (1) Die Summe von zwei Lösungen ist auch eine Lösung.

(2) Das Vielfache einer Lösung ist auch eine Lösung.

Also ist eine LK von Lösungen auch wieder eine Lösung.

Um die <u>homogene Gesamtlösung</u> zu berechnen, muss also nur eine LK von $n-r$ linear unabhängigen ~~B~~ Lösungen gebildet werden.

Um diese zu erhalten, wählt man die letzten $n-r$ Variablen, d.h. $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ so, dass die sich dann ergebenden Lösungsvektoren linear unabhängig sind.

Am einfachsten setzt man <u>eine</u> dieser $n-r$ Variablen gleich 1, die restlichen gleich 0:

$$\begin{array}{r} \\ \\ x_{r+1}= \\ \\ \\ x_n= \end{array}\begin{pmatrix} \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots \; , \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_r \end{array}\right\} \text{ausrechnen durch Einsetzen}$$

Inhomogenes LGS:

Man berechnet eine (beliebige) inhomogene Lösung und addiert dazu die homogene Gesamtlösung. Diese Summe ist die inhomogene Gesamtlösung.

Am einfachsten wählt man dazu die letzten $n-r$ Variablen gleich 0.

Unter Umständen (bei nicht „regulärer" Stufenform, d.h. in mindestens einer Nachfolgerzeile sind mehr als eine Null vor der ersten „Nichtnull" als in der Vorgängerzeile) können nicht die letzten $n-r$ Variablen frei gewählt werden. Welche man dann frei wählt, ergibt sich aus der jeweiligen Anzahl der Variablen in den einzelnen Gleichungen.

Weitere Beispiele:

(3) Beispiel 2 leicht abgeändert ($a_{22}=0$ statt 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} n=4 \\ r(A)=r(A,b)=2=r \\ \Rightarrow n-r=4-2=2 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

O: frei gewählt

(4)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 8 \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$n = 5$
$r(A) = r(A,b) = 3 = r$
$\Rightarrow n - r = 5 - 3 = 2$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ohne die 3. Gleichung:

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$n = 5$
$r(A) = r(A,b) = 2 = r$
$\Rightarrow n - r = 5 - 2 = 3$

$$x = \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$