I. Lineare Optimierung

Einführungsbeispiel:

x_i gibt an, wie viele ME von P_i hergestellt werden. $(i = 1, 2)$

Ziel: maximaler Gewinn G

$$G(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2$$ („Zielfunktion": ZF)

Bedingungen: (Restriktionen) („Nebenbedingungen": NB) s.t. (subject to)

$$x_1 + x_2 \le 100$$
$$x_1 \le 60$$
$$9x_1 + 6x_2 \le 720$$

Nicht-Negativität der Variablen: („ökonomische Variable")

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

„Nicht-Negativitätsbedingungen": NNB

Mathematisches Modell:

$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

NB:

$$x_1 + x_2 \le 100 \qquad (1)$$
$$x_1 \le 60 \qquad (2)$$
$$9x_1 + 6x_2 \le 720 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

in Matrix-Darstellung:

allgemein: $\max\ z = c^t \cdot x$

$NB:\ A \cdot x \leq b$

$x \geq 0$

hier: $c = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow c^t = (20; 10)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 720 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

1. <u>Grafisch-algebraischer Lösungsverfahren für zwei Variable</u>

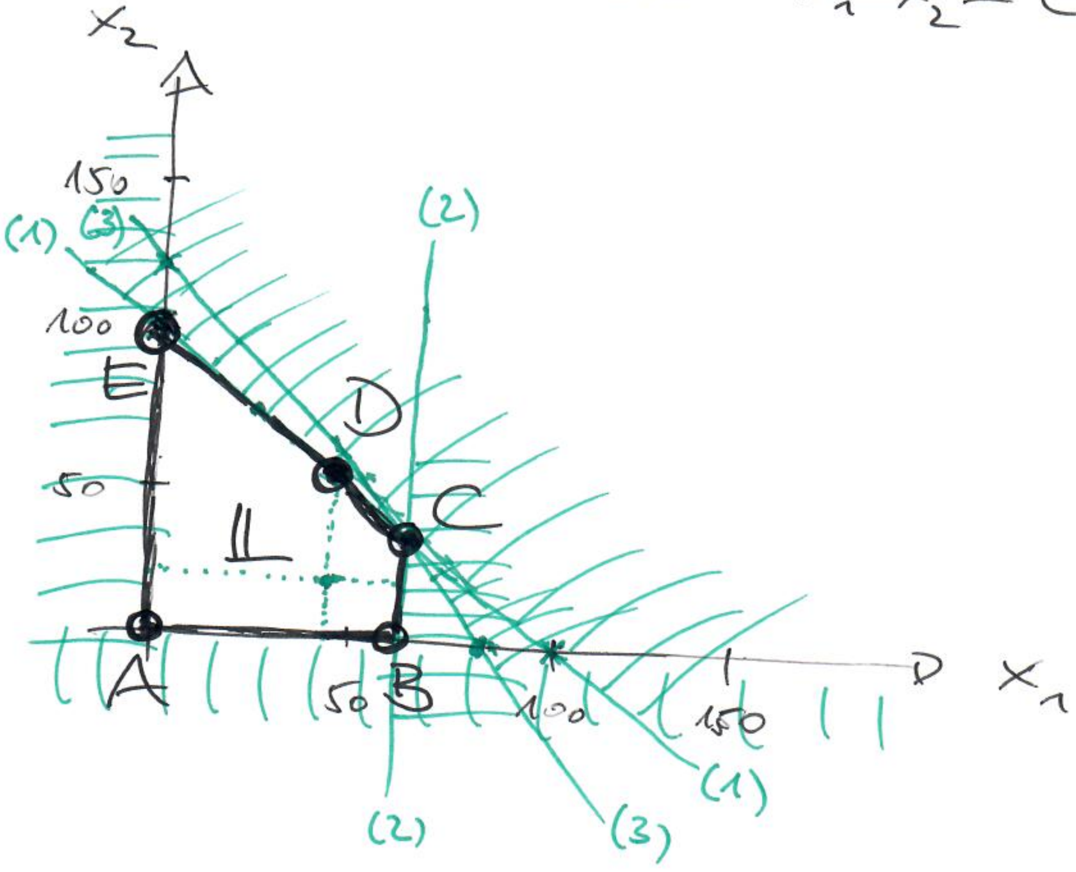
<u>1. Schritt:</u> Alle NB werden nach x_2 aufgelöst.
(Ist dies nicht möglich, da x_2 nicht vorkommt, so wird nach x_1 aufgelöst.)

1. NB: $x_2 \leq 100 - x_1$

2. NB: $x_1 \leq 60$

3. NB: $x_2 \leq 120 - \frac{3}{2} x_1$

Die zugehörigen Gleichungen sind Geraden in der x_1-x_2-Ebene:



Die Ungleichungen kennzeichnen den Teil der Ebene, der über (bei „>") bzw. unter (bei „<") der Geraden liegt (bei Auflösen nach der senkrechten x_2-Achse/Variablen).

Wird nach der waagrechten Variablen x_1 aufgelöst, so haben wir rechts (bei „>")

Wir kennzeichnen den Teil der Ebene, der die NB nicht erfüllt. Der nicht-gekennzeichnete Teil der Ebene erfüllt dann alle NB und wird als zulässige Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bezeichnet.

Satz: Die optimale Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe liegt immer in einem Eckpunkt (= zulässige Basislösung) von $\mathbb{L}$.

Damit ergibt sich der 3. Schritt: (algebraischer Teil)
Man berechnet die Koordinaten der Eckpunkte von $\mathbb{L}$ als Schnittpunkte der zugehörigen Geraden und setzt diese in die ZF ein.

Punkt:	A	B	C	D	E

Die optimale Lösung ist $x^* = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$ (optimal)
und das Maximum ist $z^* = 1500$. (max / (mi

(* bedeutet: optimal, maximal, minimal)

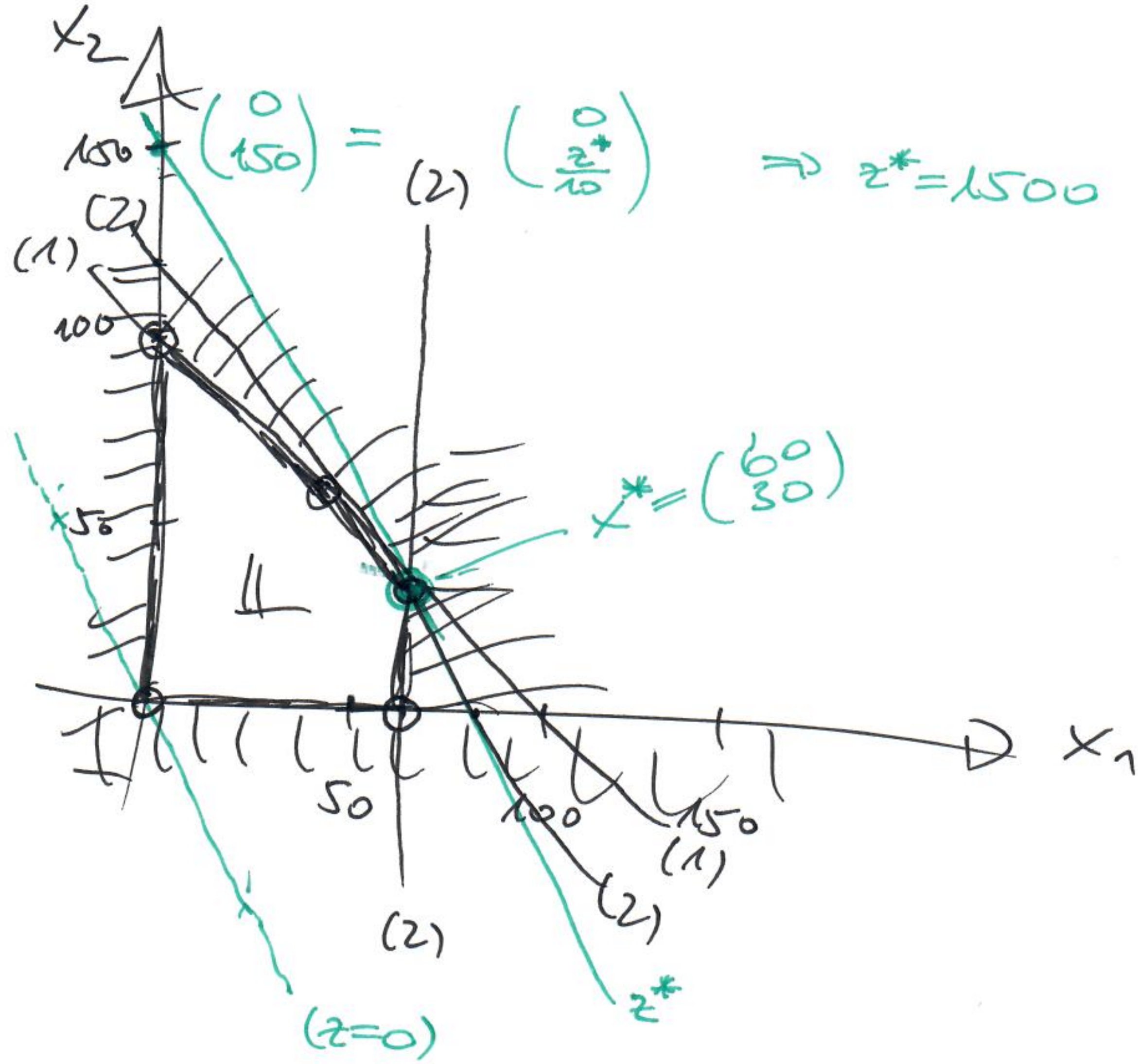
Löst man eine solche Aufgabe <u>rein</u> grafisch, so ist der

<u>3. Schritt:</u> Die ZF wird ebenfalls nach x_2 aufgelöst:

$$\boxed{x_2 = -2x_1 + \frac{z}{10}}$$

„Parallelenschar"

<u>4. Schritt:</u> Eine dieser Parallelen wird gezeichnet (am einfachsten: $z=0$) und dann parallel verschoben, so dass der Ordinatenabschnitt (hier: $\frac{z}{10}$) möglichst weit oben bzw unten ist. (hier: oben, da maximiert wird und $\frac{z}{10} > 0$)
Allerdings muss noch mindestens ein Punkt aus $\mathbb{L}$ auf dieser Parallelen liegen.


x_2
x_1
$\begin{pmatrix} 0 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z^*}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow z^* = 1500$
150
100
50
50
100
150
(1)
(2)
(2)
(1)
(2)
(2)
$x^* = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$
z^*
$(z=0)$

2. DER SIMPLEX-ALGORITHMUS

Durch Addition (bei „≤") bzw. Subtraktion (bei „≥") ~~werden~~ nicht-negativer „Schlupfvariabler" werden die Ungleichungen in Gleichungen überführt: (im Einführungsbeispiel)

$$\text{NB:}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 100 \\ x_1 \qquad + s_2 \qquad &= 60 \\ 9x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + s_3 &= 720 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Im Optimum gilt: $s^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ökonomische Bedeutung der Schlupfvariablen:

$\left.\begin{array}{ll} \text{bei „}\leq\text{":} & \text{Rest} \\ \text{bei „}\geq\text{":} & \text{Überschuss} \end{array}\right\}$ des jeweiligen Produktionsfaktors (= NB)

Die Menge der Variablen wird in zwei komplementäre Mengen aufgeteilt, in Basisvariable (BV) und in Nicht-Basisvariable (NBV).

NBV haben immer den Wert 0.
Jede NB und die ZF werden als Funktionen der NBV dargestellt.
Jede NB gehört zu genau einer BV, nach der sie aufgelöst wird.
Daraus errechnet sich der Wert der BV.
Es gibt also genauso viele BV wie NB.
Zu Beginn des Verfahrens sind die Schlupfvariablen die BV und die „echten" Variablen die NBV.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 100 - x_1 - x_2 \\
s_2 &= 60 - x_1 \\
s_3 &= 720 - 9x_1 - 6x_2 \\
\hline
z &= 20x_1 + 10x_2
\end{aligned}
$$

„Zustand der Inaktivität"

Anfangsbasislösung:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 720 \end{pmatrix} \quad z = 0$$

Überprüfung auf Optimalität:
Lässt sich z vergrößern, wenn eine der NBV positiv (d.h. BV) wird?
Da die Koeffizienten von x_1 und x_2 in der ZF positiv sind, wird z größer, wenn x_1 bzw. x_2 neue BV wird.
Wir wählen z.B. x_1 als neue BV.
Je größer x_1 nun wird, desto größer ist auch der Zuwachs $20x_1$ in der ZF.
Also wählt man die neue BV maximal.
Dazu notieren wir die NB (allerdings ohne x_2, da x_2 weiter 0 bleibt):

$$\begin{aligned} s_1 &= 100 - x_1 \geq 0 &&\Rightarrow x_1 \leq 100 \\ s_2 &= 60 - x_1 \geq 0 &&\Rightarrow \boxed{x_1 \leq 60} \leftarrow \\ s_3 &= 720 - 9x_1 \geq 0 &&\Rightarrow x_1 \leq 80 \end{aligned}$$

Die <u>kleinste</u> dieser oberen Schranken für x_1 ist der maximale Wert, den x_1 annehmen kann. Also wird $x_1 = 60$.

Damit wird $s_2 = 0$ zur NBV.
Dieser Variablentausch findet in der 2. NB statt.
Diese wird nun nach x_1 aufgelöst und damit x_1 in den anderen Gleichungen substituiert.

2. NB: $\boxed{x_1 = 60 - s_2}$

in 1. NB: $s_1 = 100 - (60 - s_2) - x_2$
$= 40 - x_2 + s_2$

in 3. NB: $s_3 = 720 - 9(60 - s_2) - 6x_2$
$= 180 - 6x_2 + 9s_2$

in ZF: $z = 20(60 - s_2) + 10x_2$
$= 1200 + 10x_2 - 20s_2$

Zusammengefasst:

NB:
$$\begin{aligned} s_1 &= 40 - x_2 + s_2 \\ x_1 &= 60 - s_2 \\ s_3 &= 180 - 6x_2 + 9s_2 \end{aligned}$$

ZF: $z = 1200 + 10x_2 - 20s_2$

Dies ist die erste verbesserte Basislösung:

$$x = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 180 \end{pmatrix} \quad z = 1200$$

Nächste Iteration:

Da in der ZF der Koeffizient von x_2 positiv ist, wird z größer, wenn x_2 BV wird.
Da s_2 0 bleibt, kann es weggelassen werden, um x_2 auszuloten:

NB: $$s_1 = 40 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 40$$
$$x_1 = 60 \geq 0 \checkmark$$
$$s_3 = 180 - 6x_2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_2 \leq 30} \leftarrow$$

Die kleinste obere Schranke $x_2 = 30$ ist der maximale Wert von x_2.
Damit wird $s_3 = 0$ zur NBV.
Also passiert der Variablentausch in der 3. NB: $\boxed{x_2 = 30 + \frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{6}s_3}$

in 1. NB: $$s_1 = 40 - \left(30 + \frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{6}s_3\right) + s_2$$
$$= 10 - \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{6}s_3$$

2. NB: bleibt unverändert, da x_2 nicht vorkommt

ZF: $$z = 1200 + 10\left(30 + \frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{6}s_3\right) - 20s_2$$
$$= 1500 - 5s_2 - \frac{5}{3}s_3$$

Zusammengefasst:

$$\text{NB:}\quad \begin{aligned} s_1 &= 10 - \tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{6} s_3 \\ x_1 &= 60 - s_2 \\ x_2 &= 30 + \tfrac{3}{2} s_2 - \tfrac{1}{6} s_3 \end{aligned}$$

$$\text{ZF:}\quad z = 1500 - 5 s_2 - \tfrac{5}{3} s_3$$

Dies ist die zweite verbesserte Basislösung:

$$x = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = 1500$$

Da alle Koeffizienten der NBV in der ZF negativ sind, ist das zuletzt berechnete z maximal und die zuletzt berechneten x und s optimal:

$$x^* = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix} \quad s^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z^* = 1500$$

Wir werden ab hier nur noch mit der Matrix-Darstellung („Simplex-Tableau") arbeiten.

Allgemein:

Anfangstableau:

	$x_1\ x_2 \dots x_n$	$s_1\ s_2 \dots s_m$	
$s_1, s_2, \vdots, s_m$	A	E	b
z	$-c^t$	0	0

danach:

	$x_1\ x_2 \dots x_n$	$s_1\ s_2 \dots s_m$	
BV			Werte der BV
z			Wert von z

Schlusstableau:

	$x_1\ x_2 \dots x_n$	$s_1\ s_2 \dots s_m$	
BV			x_i^*; s_j^* Werte der BV
z	≥ 0	≥ 0	z^*

Die Spalten der BV sind Einheitsvektoren, d.h. enthalten außer einer 1 in der zugehörigen Zeile nur Nullen.

für das Einführungsbeispiel:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		Min
s_1	1	1	1	0	0	100	$\frac{100}{1}=100$
s_2	1	0	0	1	0	60	$\frac{60}{1}=60$
s_3	9	6	0	0	1	720	$\frac{720}{9}=80$
z	-20	-10	0	0	0	0	

y

ab

Sch

Pivotzeil

Pivotelement

Pivotspalte (neue BV)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		Min
s_1	0	1	1	-1	0	40	$\frac{40}{1}=40$
x_1	1	0	0	1	0	60	*
s_3	0	6	0	-9	1	180	$\frac{180}{6}=30$
z	0	-10	0	20	0	1200	

y

s_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	10
x_1	1	0	0	1	0	60
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	30
z	0	0	0	5	$\frac{5}{3}$	1500

x^* y^*

s_1	1	1	1	0	0	100	100 ←
s_2	1	0	0	1	0	60	*
s_3	9	6	0	0	1	720	120
z	-20	-10	0	0	0	0	

↑

x_2	1	1	1	0	0	100	100
s_2	1	0	0	1	0	60	60
s_3	3	0	-6	0	1	120	40 ←
z	-10	0	10	0	0	1000	

↑

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
x_2	0	1	3	0	$-1/3$	60	20
s_2	0	0	2	1	$-1/3$	20	10 ←
x_1	1	0	-2	0	$1/3$	40	*
z	0	0	-10	0	$10/3$	1400	

↑

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	0	$-3/2$	$1/6$	30
s_1	0	0	1	$1/2$	$-1/6$	10
x_1	1	0	0	1	0	60
z	0	0	0	5	$5/3$	1500

$s_2 = 1$, d.h.
2. NB: ... ≤ 59
$\rightarrow z^*_{neu} = 1500 - 5 \cdot 1$
$= 1495$

$s_2 = -1$, d.h.
2. NB: ... ≤ 61
$\rightarrow z^*_{neu} = 1500 - 5 \cdot (-1)$
$= 1500 + 5 = 1505$

$$z^* = 1500 - 5 \cdot s_2 - \frac{5}{3} s_3$$

Algorithmus:

1. Schritt: Erstellen des Anfangstableaus

2. Schritt: Überprüfung auf Optimalität:
Sind alle Koeffizienten der z-Zeile ≥ 0, so ist die zuletzt berechnete Lösung optimal $\longrightarrow$ $\boxed{\text{ENDE}}$

Ist (mindestens) ein Koeffitient der ~~Z~~ Zeile negativ, so wähle ich die betreffende Spalte als Pivotspalte (neue BV).

3. Schritt: Dividiere die Elemente der letzten Spalte durch die zugehörigen ~~Koef~~ positiven Koeffizienten der Pivot-Spalte. Das Minimum dieser Quotienten bestimmt die Pivotzeile ($BV \rightarrow NBV$).

4. Schritt: Erstellen des neuen Tableaus:
Dividiere die Pivotzeile durch das Pivot-element! (neue Pivotzeile)
Damit alle anderen Elemente der Pivotspalte 0 werden, wird die Pivotzeile mit einer jeweils geeigneten Konstanten multipliziert und zu

den anderen Zeilen addiert.

5. Schritt : Gehe zu Schritt 2!

Ändert man auf der „rechten Seite" einer NB die Konstante um 1 ME („marginale Änderung"), so lässt sich aus dem Simplex-Tableau erkennen, wie sich das (bisherige) Maximum z^* ändert, ohne explizit die neue optimale Lösung berechnen zu müssen.
Diese Änderung bezeichnen wir als die Grenzproduktivität des jeweiligen Produktionsfaktors (= NB).
Die Grenzproduktivität des i-ten Produktionsfaktor wollen wir mit y_i bezeichnen. $(i = 1, 2, \dots, m)$
Diese stehen in der z-Zeile des Tableaus in den Spalten der Schlupfvariablen.

Im Einführungsbeispiel gilt:

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet folgendes:

Lautet die

- 1. NB: $x_1 + x_2 \le 100 \pm 1$,

  also: $x_1 + x_2 \le 101$ bzw.

  $x_1 + x_2 \le 99$,

  so ändert sich $z^* = 1500$ nicht, da $y_1^* = 0$.

  (Liegt daran, dass $x_1^* + x_2^* = 60 + 30 = 90 <$ 100 bzw. $s_1 = 10 > 0$: <u>freies</u> Gut)

- 2. NB: $x_1 \le 60 \pm 1$,

  also: $x_1 + x_2 \le 61$ bzw.

  $x_1 + x_2 \le 59$,

  so ändert sich z^* um $5 = y_2^*$, d.h.

  $z^*_{neu} = z^*_{alt} + 5$ bzw. $z^*_{alt} - 5$.

Für

– 3. NB: $9x_1 + 6x_2 \leq 720 \pm 1$,

also $9x_1 + 6x_2 \leq 721$ bzw.

$9x_1 + 6x_2 \leq 719$,

so ändert sich z^* um $\frac{5}{3} = y_3^*$.

Für $9x_1 + 6x_2 \leq 721$, wird dann

$z^*_{neu} = 1500 + \frac{5}{3} = \frac{4505}{3}$ $(\approx 1501{,}67)$.

Für $9x_1 + 6x_2 \leq 719$, wird dann

$z^*_{neu} = 1500 - \frac{5}{3} = \frac{4495}{3}$ $(\approx 1498{,}33)$.

Diese Grenzproduktivitäten werden auch als duale Variable bezeichnet.

Die ursprünglichen Variablen werden als primale Variable bezeichnet.

3. Die duale Aufgabe

Zu jeder linearen Optimierungsaufgabe gibt es eine zugehörige duale lineare Optimierungsaufgabe.

Bezeichnen wir die lineare Optimierungsaufgabe

$$\max \ z = c^t \cdot x$$

$$\text{NB:} \quad A \cdot x \leq b$$

$$x \geq 0$$

als Standard-Max-Form, so lautet die dazu duale Aufgabe

$$\min \ w = b^t \cdot y$$

$$\text{NB:} \quad A^t \cdot y \geq c$$

$$y \geq 0$$

(„Standard-Min-Form")

Jede Variable im einen Problem entspricht einer NB im anderen (und umgekehrt).

im Einführungsbeispiel:

primale Aufgabe: $\max z = 20x_1 + 10x_2$

$n = 2$ Variable

$m = 3$ NB

$$\begin{aligned} \text{NB: } x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 &\le 60 \\ 9x_1 + 6x_2 &\le 720 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Die dazu duale Aufgabe lautet:

$$\min w = 100y_1 + 60y_2 + 720y_3$$

$m = 3$ Variable

$n = 2$ NB

$$\begin{aligned} \text{NB: } y_1 + y_2 + 9y_3 &\ge 20 \\ y_1 + 6y_3 &\ge 10 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Die duale Aufgabe der dualen Aufgabe ist wieder die ursprüngliche (=primale) Aufgabe.

Also können wir ein Minimierungsproblem lösen, indem wir die dazu duale Max-Aufgabe formulieren und diese mit Hilfe des Simplex-Tableaus lösen.

Beispiel: Zwei Produktionskanäle erzeugen drei Chemikalien C_1, C_2 und C_3. Die Tagesproduktion bei Kanal A beträgt 10 ME C_1, 1 ME C_2 und 15 ME C_3, bei Kanal B sind es 10 ME C_1, 6 ME C_2 und 4 ME C_3.

Die Produktionskosten dafür ~~sind~~ sind 5500 € bei Kanal A und 4400 € bei Kanal B.

Wie viele Tage soll jeder Kanal laufen, wenn für einen Auftrag, der möglichst billig erledigt werden soll, 40 ME C_1, 10 ME C_2 und 27 ME C_3 herzustellen sind?

x_1 und x_2 geben an, wie viele Tage Kanal A und Kanal B laufen.

$$\min \quad z = 5500x_1 + 4400x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{NB}: \quad 10x_1 + 10x_2 &\geq 40 \quad (C_1) \\
x_1 + 6x_2 &\geq 10 \quad (C_2) \\
15x_1 + 4x_2 &\geq 27 \quad (C_3) \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
(x_1, x_2 &\in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

Das dazu duale Problem lautet:

$$\max \; w = 40y_1 + 10y_2 + 27y_3$$

$$\text{NB}: \quad 10y_1 + y_2 + 15y_3 \le 5500$$
$$10y_1 + 6y_2 + 4y_3 \le 4400$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Das zugehörige Simplex-Tableau:

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2		
t_1	10	1	15	1	0	5500	
t_2	10	6	4	0	1	4400	←
w	-40	-10	-27	0	0	0	
	↑						

t_1	0	-5	11	1	-1	1100	100 ←
y_1	1	$3/5$	$2/5$	0	$1/10$	440	1100
w	0	14	-11	0	4	17600	
			↑				

y_3	0	$-5/11$	1	$1/11$	$-1/11$	100
y_1	1	$43/55$	0	$-2/55$	$3/22$	400
w	0	9	0	1	3	18700

$\underbrace{0 \quad 9 \quad 0}_{s^*} \qquad \underbrace{1 \quad 3}_{x^*}$

$$y^* = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad t^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z^* = 18\,700 = w^*$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kanal A läuft einen Tag, Kanal B drei Tage, dann sind die Kosten minimal, und zwar $w^* = z^* = 18\,700$.

<u>Preistheorem der linearen Optimierung:</u>

Sind die optimalen Lösungen x^* und y^* <u>eindeutig</u>, so gilt:

(1) $x_i^* > 0 \iff t_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

(2) $y_j^* > 0 \iff s_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

(3) $x_i^* = 0 \iff t_i^* > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

(4) $y_j^* = 0 \iff s_j^* > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

→ n primale Variable: $x_1, x_2, \dots, x_n$
m " NB ($\hat{=}$ Schlupfvar.): $s_1, s_2, \dots, s_m$
m duale Variable: $y_1, y_2, \dots, y_m$
→ n " NB ($\hat{=}$ Schlupfvar.): $t_1, t_2, \dots, t_n$