

Aufgabe 2

(15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 3x^2y + 2y^3 - 6y - 1$$

Außerdem sei gegeben der Richtungsvektor $\vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a(7) Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}(f(x, y))$ und die Hessematrix $Hf(x, y)$.

b(3) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $P(-1, 1)$ in Richtung $\vec{a}$.

c(5) Bestimmen Sie alle Extrema von f und bestimmen Sie ob an diesen Stellen ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, ein Sattelpunkt oder keines der vorhergehenden Möglichkeiten vorliegt.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy \quad (3P)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + 6y^2 - 6 \quad (4P)$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{grad } f(-1, 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

$$= (-6, 3+6-6) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 = -\frac{9}{2} \sqrt{2} \quad (1P)$$

c) Extrema $\Rightarrow f'(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 6xy = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$$

$$3x^2 + 6y^2 - 6 = 0$$

$$6y^2 - 6 = 0$$

$$\text{bzw. } y^2 = 1 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow P_1(0, 1), P_2(0, -1), P_3(\sqrt{2}, 0), P_4(-\sqrt{2}, 0) \quad (1P)$$

$$Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ positiv definit} \Rightarrow \text{Min} \quad (1P)$$

$$Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ neg. definit} \Rightarrow \text{Max} \quad (1P)$$