Ersatz für Aufgabe 3 (10 Punkte ohne Gewähr)

Falls es Ihnen nicht gelingt, eine entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, können Sie folgende Ersatzaufgabe lösen:

a(7) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:

$x^2 \cdot y'(x) = y \cdot (x - y)$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

b(3) Überprüfen Sie Ihre gefundene Lösung durch eine Probe.

Bemerkung: Bearbeiten Sie nur eine Alternative (Für Aufgabe 3 gibt es nicht mehr als 15 Punkte ohne Gewähr)

$$y'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot yx - y^2 = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$ 1P

$z = \frac{y}{x}$ bzw $y = z \cdot x \Rightarrow y' = z \cdot 1 + z' x$ 1P

$\Rightarrow z + z' x = z - z^2$

$\Rightarrow z' x = -z^2$ 1P $\Rightarrow \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{z^2}\, dz = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int z^{-2}\, dz = -\int \frac{1}{x}\, dx$$ 1P

$$-z^{-1} = -\ln x + c$$

$$\frac{1}{z} = \ln x - c$$

$$z = \frac{1}{\ln x - c}$$ 1P

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln x - c} \qquad y(x) = \frac{x}{\ln x - c}$$

$$y(1) = \frac{1}{\ln(1) - c} = 1$$

$$-1 = c$$ 1P

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x}{\ln x + 1} = x \cdot (\ln x + 1)^{-1}$$ 1P

Probe: ls: $x^2 \cdot \left([\ln x + 1]^{-1} - x (\ln x + 1)^{-2} \cdot 1/x \right)$ 1P 1P

$= x^2 \left[(\ln x + 1)^{-1} - (\ln x + 1)^{-2} \right]$

rs: $x (\ln x + 1)^{-1} \left(x - x \cdot (\ln(x+1))^{-1} \right)$ 1P

$= x^2 (\ln x + 1)^{-1} - x^2 \cdot (\ln x + 1)^{-2}$ 1P ✓