

Aufgabe 1

(10 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

- a(7) Bestimmen Sie das Taylorpolynom fünften Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ (Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden).

Taylorreihe für $\cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ 2P

\nearrow 0. Glied \nearrow 2. tes Glied \nearrow 4. tes Glied

2P 5. tes Glied ist 0 (Null)

$$\Rightarrow T_{f,0}^{(5)}(x) = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}}{x} = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!}$$

7P

- b(3) Bestimmen Sie den Fehler an der Stelle $x = 2\pi$

$$f(2\pi) = \frac{1 - \cos(2\pi)}{2\pi} = \frac{1 - 1}{2\pi} = 0$$

1P

$$T_{f,0}^{(5)}(2\pi) = \frac{2\pi}{2!} - \frac{(2\pi)^3}{4!} + \frac{(2\pi)^5}{6!} =$$

$$= \frac{2\pi}{2} - \frac{8\pi^3}{24} + \frac{32\pi^5}{720}$$

1P

$$= \pi - \frac{\pi^3}{24} + \frac{2}{45}\pi^5$$

$$= \pi \left(1 - \frac{\pi^2}{24} + \frac{2}{45}\pi^4\right) =$$

1P