Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Berechnen Sie das (mehrdimensionale) Taylorpolynom p(x,y) der Funktion

$f(x,y) = e^{sin(x)-cos(y)}$

bis zum Grad 2 im Entwicklungspunkt $P(x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{2})$.

Ableitungen:

$f_x(x,y) = e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot \cos(x)$ 1 $\quad f_x(0,\frac{\pi}{2}) = e^{0-0} \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

$f_y(x,y) = e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot \sin(y)$ 1 $\quad f_y(0,\frac{\pi}{2}) = 1$ wegen $\sin(\frac{\pi}{2}) = \underline{\underline{1}}$ 1

$f_{xx}(x,y) = e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot (-\sin(x))$ 1

$= e^{\sin(x)-\cos(y)} [\cos^2 x - \sin(x)] \quad f_{xx}(0,\frac{\pi}{2}) = e^{0-0}[1-0] = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$ 1

$f_{xy}(x,y) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot \sin(y)$ 1 $\quad f_{xy}(0,\frac{\pi}{2}) = 1 \cdot e^{0-0} \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$ 1

$f_{yy}(x,y) = e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot \sin(y) \cdot \sin(y) + e^{\sin(x)-\cos(y)} \cdot (+) \cos(y)$ 1

$= e^{\sin(x)-\cos(y)} [\sin^2(y) + \cos(y)] = e^{0-0} \cdot [1^2 - 0] = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$ 1

Außerdem gilt: $f(0,\frac{\pi}{2}) = e^{\sin(0)-\cos(\frac{\pi}{2})} = e^{0-0} = e^0 = \underline{\underline{1}}$ 1

damit gilt

$p(x,y) = f(x_0,y_0) + \operatorname{grad} f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + (x-x_0, y-y_0) \operatorname{Hess} f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x- \\ y- \end{pmatrix}$ 1

$= 1 + (1,1) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y-\frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ 2

$= 1 + x + y - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{2}(x \cdot (y-\frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{2})^2$ 1

$= 1 + x + y - \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + \cancel{2}xy - \frac{x\pi}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}$