Aufgabe 2 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion

$f(x, y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-x}$

a(8) Berechnen Sie die Extrema der Funktion

b(7) Untersuchen Sie diese Extrema im Hinblick auf Maximum, Minimum oder Sattelpunkt.

$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2 - y^2) \cdot (-) e^{-x} \overset{!}{=} 0$ I 1

$f_y(x,y) = -2y \cdot e^{-x} \overset{!}{=} 0$ II 1

aus II folgt $y = 0$ 1 da $e^{-x} \neq 0$

eingesetzt in I folgt

$2x e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} [2 - x]$ 1

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$ 1
$\quad\quad x_2 = 2$ 1

Damit ergeben sich die Punkt $P_1(0,0)$ 1 und $P_2(2,0)$ 1 als Extrema der Funktion

$f_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - [2x \cdot e^{-x} - (x^2 - y^2) \cdot e^{-x}]$

$= e^{-x} [2 - 2x - 2x + (x^2 - y^2)]$ 1

$f_{yx}(x,y) = +2y e^{-x}$ 1

$f_{yy}(x,y) = -2 e^{-x}$ 1

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 1 Charakterist polynom: $(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$
$\quad \lambda_2 = -2$ 1

$\Rightarrow$ Indefinit 1

$\Rightarrow P_1(0,0)$ ist Sattel

$\text{Hess} f(2,0) = \begin{pmatrix} e^{-2} \cdot [2-4-4+4] \, , & 0 \\ 0 \, , & -2 e^{-2} \end{pmatrix} = e^{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -e^{-2} 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1