

Aufgabe 1

(10 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$.

a(7) Bestimmen Sie das Taylorpolynom fünften Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$
(Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden.) .

b(3) Bestimmen Sie den Fehler an der Stelle $x = 2\pi$

Aufgabe 2

(15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 3x^2y + 2y^3 - 6y - 1$$

Außerdem sei gegeben der Richtungsvektor $\vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a(7)** Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}(f(x,y))$ und die Hessematrix $\text{Hf}(x,y)$.
- b(3)** Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $P(-1,1)$ in Richtung \vec{a} .
- c(5)** Bestimmen Sie alle Extrema von f und bestimmen Sie ob an diesen Stellen ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, ein Stettpunkt oder keines der vorhergehenden Möglichkeiten vorliegt.

Aufgabe 3

(15 Punkte ohne Gewähr)

Durch Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ entsteht ein Trichter der mit Wasser gefüllt wird. Die kreisrunde Wasseroberfläche hat einen Durchmesser von 200 cm und befindet sich in einer Höhe von 10 cm über dem Auslass, der sich an der tiefsten Stelle des Trichters befindet. Der kreisrunde Auslass hat einen Durchmesser von 2 cm.

Wie lange dauert es vom Zeitpunkt des Öffnens des Auslasses bis zu dem Zeitpunkt an dem der Trichter leer ist?

Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 20 \cdot \sqrt{5y(t)} \text{ cm/s}$ (Gesetz von Torricelli)
wobei $y(t)$ die aktuelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Auslass ist.

- a(7)** Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.
- b(5)** Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung aus Aufgabe 3a.
- c(3)** Nach welcher Zeit ist der Trichter leer?

Platz für Berechnungen

Ersatz für Aufgabe 3 (10 Punkte ohne Gewähr)

Falls es Ihnen nicht gelingt, eine entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, können Sie folgende Ersatzaufgabe lösen:

a(7) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot y'(x) = y \cdot (x - y) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad y(1) = 1 .$$

b(3) Überprüfen Sie Ihre gefundene Lösung durch eine Probe.

Bemerkung: Bearbeiten Sie nur eine Alternative (Für Aufgabe 3 gibt es nicht mehr als 15 Punkte ohne Gewähr)