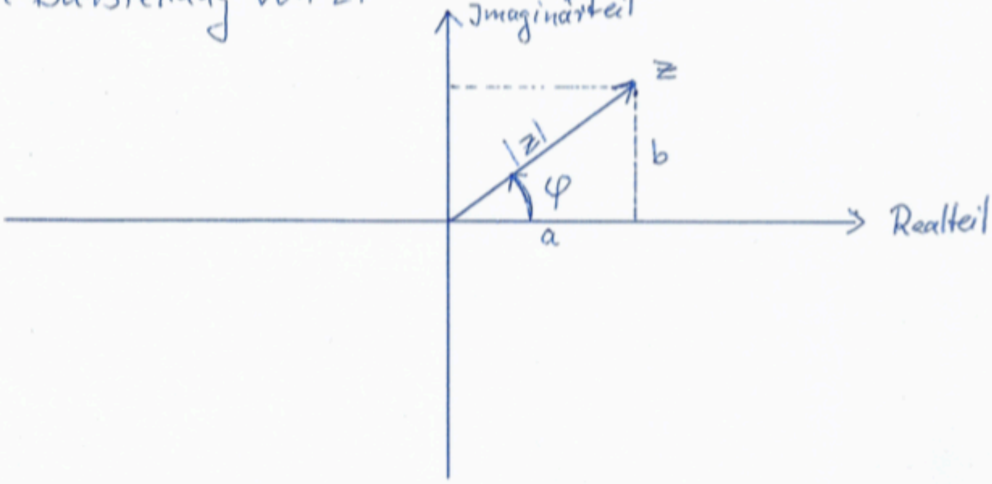
Winkelbestimmung komplexer Zahlen in polarer Darstellung

kartesische Darstellung von z:

$z = a + ib$ a: Realteil ; b: Imaginärteil

polare Darstellung von z:



Kenngrößen (Parameter): $|z|$, φ

Transformation aus kartesischer Darstellung in die polare:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \longrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{|z|}\right)}$$ ← Das wählen wir!

oder

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \longrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{a}{|z|}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \longrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

φ im Bogenmaß! rad

$$\frac{rad}{2\pi} = \frac{grad}{360}$$

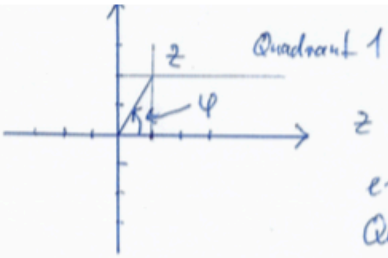
Aber: Aus $\sin\varphi$ ist φ nicht eindeutig bestimmt!

Beispiel 1

$z = 1 + i2$

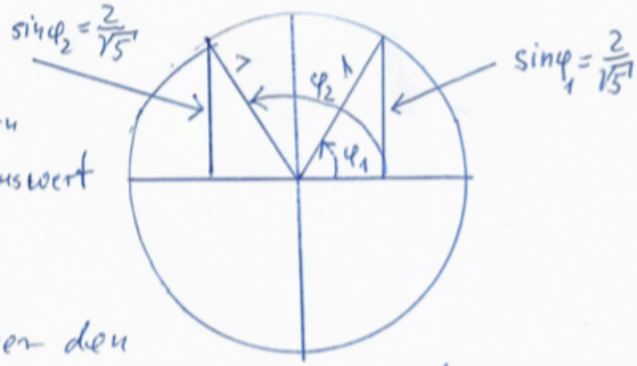
$|z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$



z liegt im ersten Quadranten

Einheitskreis:



φ_2 und φ_1 liefern den gleichen Sinuswert

$\varphi_2 = \pi - \varphi_1$

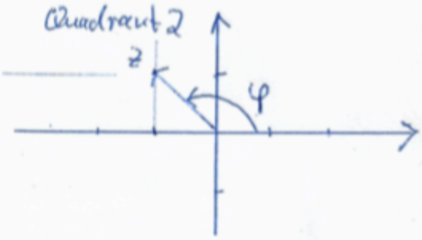
Der Rechner liefert immer den Winkel ~~Sinuswert~~ mit dem kleinsten Betrag. Hier richtig, denn die komplexe Zahl liegt im ersten Quadranten! $\varphi = \varphi_1$

Beispiel 2

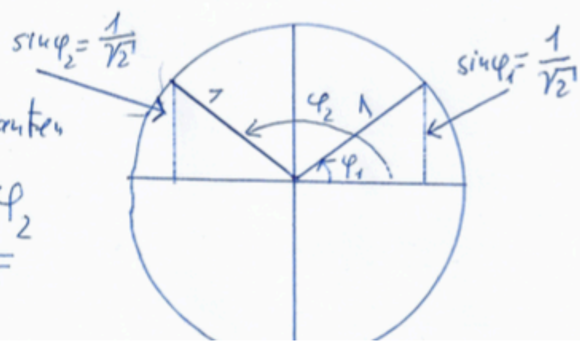
$z = -1 + i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$



Einheitskreis:



Der Rechner gibt φ_1

Das ist hier FALSCH, denn die komplexe Zahl liegt im 2. Quadranten

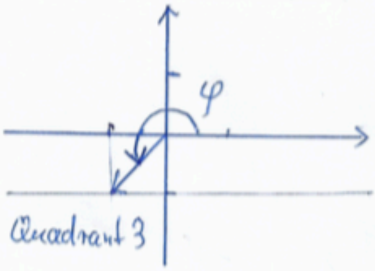
$$\varphi = \pi - \varphi_{Rechner} = \varphi_2$$

Beispiel 3:

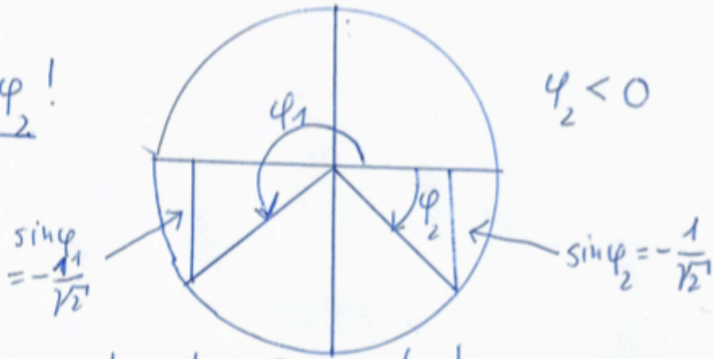
$z = -1 - i$

$|z| = \sqrt{2}$

$\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$



Einheitskreis



$\varphi_2 < 0$

Der Rechner gibt φ_2!

Das ist falsch, weil die komplexe Zahl im 3. Quadranten liegt

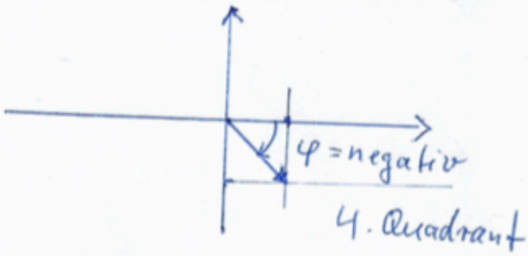
$\varphi_1 = \pi + |\varphi_2|$ ← weil φ_2 negativ ist → Betragsstrich

Beispiel 4:

$z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{2}$

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



Der Rechner liefert den negativen Winkel φ. Das ist hier richtig weil die komplexe Zahl im 4. Quadranten liegt

Zusammenfassung:

$z = a + ib \;\rightarrow\; |z| = \sqrt{a^2+b^2}\,, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$

$\rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{|z|}\right)$

(Rechner: $\arcsin \rightarrow \sin^{-1}$)

φ im Bogenmaß, Radiant

z im

Ersten Quadranten $\rightarrow \quad \varphi = \varphi_{Rechner}$

Zweiten Quadranten $\rightarrow \quad \varphi = \pi - \varphi_{Rechner}$

Dritten Quadranten $\rightarrow \quad \varphi = \pi + |\varphi_{Rechner}|$

Vierten Quadranten $\rightarrow \quad \varphi = \varphi_{Rechner}$ (ist negativ)

Allgemein: φ und $\varphi + m2\pi$ liefern die gleiche komplexe Zahl z.
$m \in \mathbb{Z}$

Wurzelziehen aus komplexen Zahlen

$$z = |z| \, e^{i(\varphi + m 2\pi)}$$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \left[e^{i(\varphi + m 2\pi)} \right]^{1/n} = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} 2\pi\right)}$$

Es gibt n n-te Wurzeln

Starte mit $m = 0$, dann $m = 1$ bis $m = n - 1$

Das ergibt alle n n-te Wurzeln

$m = 0$ $\quad \left(z^{1/n}\right)_1 = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}\right)}$

$m = 1$ $\quad \left(z^{1/n}\right)_2 = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{1}{n} 2\pi\right)}$

$m = 2$ $\quad \left(z^{1/n}\right)_3 = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2}{n} 2\pi\right)}$

$\vdots$

$m = n - 1$ $\quad \left(z^{1/n}\right)_n = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{n-1}{n} 2\pi\right)}$