Übungsaufgaben Mathematik 2 Analysis für die Übungen am 20.5 und am 23.5.25

19. Mai 2025

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und geben Sie an, ob es sich um ein lokales oder globales, bzw. ein isoliertes Extremum handelt:

$$\begin{array}{llcl} \text{a)} & f(x,y) & = & x^3y^2(1-x-y) \\ \text{b)} & g(x,y) & = & x^k + (x+y)^2 \qquad (k=0,3,4) \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass grad f = 0 also

$3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 = x^2y^2 \cdot (3-4x-3y)$ und
$2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 = x^3y \cdot (2-2x-3y)$

also 1. Lösung: x=0, y beliebig (y-Achse)
und 2. Lösung: y=0, x beliebig (x-Achse)

Ausserdem $3-4x-3y=0$ und $2-2x-3y=0$ also $1-2x=0$
also 3. Lösung: x=$\frac{1}{2}$ und y = $\frac{1}{3}$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Hess}f(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \text{semidefinit.}$$

$$\mathrm{Hess}f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3 - 2x^4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

In Abhängigkeit von x positiv oder negativ semidefinit;
positiv für $0 < x < 1$ und negativ für $x < 0$ oder $x > 1$

$$\mathrm{Hess}f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$\mathrm{Hess}f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ist negativ definit; also lokales Maximum

b) $g(x,y) = x^k + (x+y)^2 \qquad (k = 0, 3, 4)$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = k \cdot x^{k-1} + 2(x+y)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)$

Fall k=0:

Wegen $g(x,y) = 1 + (x+y)^2 \geq 1$ und g(x,y) = 1 für x + y = 0
$\Rightarrow$ in allen Punkten der Geraden x + y = 0 bzw. y = -x hat g ein Minimum.

Fall k = 3,4:
Aus der Bedingung grad f = 0 folgt

$2(x+y) = 0$ also $y = -x$ und
$k \cdot x^{k-1} + 2(x+y) = k \cdot x^{k-1} + 2(x-x) = k \cdot x^{k-1} = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 0$ und $y = 0$

$$\mathrm{Hess}f(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \text{semidefinit.}$$

Fall k=3:

$g(x,-x) = x^3 \qquad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt

Fall k=4:
$g(x,y) = x^4 + (x+y)^2 > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und
$g(x,y) = x^4 + (x+y)^2 = 0$ für $(x,y) = (0,0) \qquad \Rightarrow \quad$ lokales Minimum

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

a) Berechnen Sie grad$f$ und zeigen Sie: grad$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Zeigen Sie, daß (Hess$f$)(0) semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.

c) Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).

Lösung zu Aufgabe 2

a) Berechnen Sie grad$f$ und zeigen Sie: grad$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
$f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3 - 8xy = 4x \cdot (3x^2 - 2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2 + 2y = 2 \cdot (y - 2x^2)$

Die Bedingung grad f = 0 führt auf $y - 2x^2 = 0$ bzw. $y = 2x^2$
und auf $4x \cdot (3x^2 - 2y) = 4x \cdot (3x^2 - 4x^2) = -4x^3 = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0$ und $y = 0$

b) Zeigen Sie, daß (Hess$f$)(0) semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.

$$\text{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\text{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \text{positiv semidefinit}$$

Betrachte f auf der Ortskurve $y = \alpha \cdot x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (Alle Geraden durch den Nullpunkt)

$\Rightarrow \quad \phi(x) = f(x, \alpha \cdot x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 3x^2) = 3x4 - 4\alpha x^3 + \alpha^2 x^2$
$\phi'(x) = 12x^3 - 8\alpha x^2 + 2\alpha^2 x \qquad \Rightarrow \quad \phi'(0) = 0$
$\phi''(x) = 36x^2 - 16\alpha x + 2\alpha^2 \qquad \Rightarrow \quad \phi''(0) > 0$

Also hat f auf der Geraden $y = \alpha \cdot x$ in (0,0) ein Minimum

c) Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).
Betrachte f auf der Ortskurve $y = 2x^2$

$\Rightarrow \quad f(x, 2x^2) = x^2 \cdot (-x^2)$

und betrachte f auf der Ortskurve $y = 0$ (x-Achse)

$\Rightarrow \quad f(x, 0) = 3x^4$
Also hat f in (0,0) kein lokales Extremum (Sattelpunkt)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für}(x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie , daß im Punkt (0,0) alle Richtungsableitungen existieren. Ist f in (0,0) differenzierbar?
(Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach. Betrachten Sie einen Kreis um den Nullpunkt und lassen Sie den Radius des Kreises gegen Null streben).

Lösung zu Aufgabe 3

Gegeben sei ein Kreis um den Nullpunkt (0,0) in $\mathbb{R}^2$ durch (u,v) $\in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 = 1$
Betrachte nun f auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Kreisradius $\to 0$

Allgemein gilt daher:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cdot u, t\cdot v) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot u\cdot (t\cdot v)^3}{t\cdot((t\cdot u)^2 + (t\cdot v)^6)} = \lim_{t\to 0} t\cdot \frac{u\cdot v^3}{u^2 + t^4\cdot v^6} = 0$$

sowohl für $u \neq 0$ da $|\frac{u\cdot v^3}{u^2+t^4\cdot v^6}| < |\frac{u\cdot v^3}{u^2}| <$ Konstante
als auch für $u = 0$ (und v = 1)

Daher existieren alle Richtungsableitungen in (0,0) und haben den Wert 0.

f ist aber in (0,0) nicht total differenzierbar:

wegen $f(y^3, y) = \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{1}{2}$ für $y \to 0$ und f(0,0) = 0
ist f an der Stelle (0,0) nicht stetig, also auch an der Stelle (0,0) nicht total differenzierbar