

Übungsaufgaben Mathematik 2 Analysis für die Übungen am 6. und 9.5.25

5. Mai 2025

Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz (aus der Vorlesung): Eine Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen \vec{a} , wenn alle ihre Koordinatenfolgen gegen entsprechende Koordinaten von \vec{a} konvergieren.

Lösung zu Aufgabe 1

Konvergiere also die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \vec{a}
dann gilt gemäss Definition:

$$\|\vec{a}_n - \vec{a}\| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq N(\varepsilon)$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a} \text{ beziehungsweise } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$$

Wegen der Definition der Norm folgt aus $\|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$ das alle Komponenten des Vektors $\vec{a}_n - \vec{a}$ Null sein müssen

also konvergieren alle Komponenten der Folge \vec{a}_n gegen die entsprechen Komponente von \vec{a}

Konvergiert umgekehrt jede Komponenten i der Folge \vec{a}_n gegen die entsprechende Komponente von \vec{a} sprich a_i so gilt wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_i^{(n)} - a_i| = 0$ dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + (a_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots} = 0 \text{ also konvergiert die Vektorfolge } (\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ gegen } \vec{a}$$

Aufgabe 2

- In der industriellen Fertigung werden bei der Qualitätskontrolle Bauteile vermessen und die Werte x_1, \dots, x_n ermittelt. Der Vektor $\vec{d} = \vec{x} - \vec{s}$ gibt die Abweichungen der Messungen zu den Sollwerten s_1, \dots, s_n an. Definieren Sie nun eine Norm auf \mathbb{R}^n derart, daß $\|\vec{d}\| < \varepsilon$ gdw. alle Abweichungen vom Sollwert kleiner als eine gegebene Toleranz ε sind.
- Beweisen Sie, daß die in a) definierte Norm alle Axiome einer Norm erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die in Frage kommende Abbildung ist die so genannte Maximum-Norm:

$$\|\vec{x}\|_{max} := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

b) Die Abbildung $\|\cdot\|_{max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm wegen:

1. Aus $\|\vec{x}\|_{max} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Und aus $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ folgt $\max(|x_1|, \dots, |x_n|) = \|\vec{x}\|_{max} = 0$

2. Es gilt $\|\lambda \cdot \vec{x}\|_{max} = \max(|\lambda \cdot x_1|, \dots, |\lambda \cdot x_n|) = |\lambda| \cdot \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{max} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

3. Es gilt $\|\vec{x} + \vec{y}\|_{max} = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|) \leq \max(|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|) \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) + \max(|y_1|, \dots, |y_n|) = \|\vec{x}\|_{max} + \|\vec{y}\|_{max} \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
Dreiecksungleichung

Aufgabe 3

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$ folgender Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ b) $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3}$ c) $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)}$
d) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$ e) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{|\vec{x}|}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{|\vec{x}|}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_3}{|\vec{x}|}$

b) $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3} = e^{\ln(x_1^{x_2})} + e^{\ln(x_1^{x_3})} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} + e^{x_3 \cdot \ln(x_1)}$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_2-1} + x_3 \cdot x_1^{x_3-1}$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} \cdot \ln(x_1) = x_1^{x_2} \cdot \ln(x_1)$
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{x_3} \cdot \ln(x_1)$

c) $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)} = x_1^{x_2} \cdot x_1^{x_3}$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_2 + x_3) \cdot x_1^{(x_2+x_3)-1}$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^{x_3} \cdot x_1^{x_2} \cdot \ln(x_1) = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$

d) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

e) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot 1$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot a$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Funktion $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3} \\ \sin(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \cdot (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2 x_3 = \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \cos(x_1 x_2 x_3) \cdot x_2 x_3 \end{aligned}$$

also

$$d\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_2}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}} \\ \cos(x_1 x_2 x_3) x_2 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Geben Sie für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ \sin(e^x + e^y) \end{pmatrix}$ die Tangentialebene im Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

Lösung zu Aufgabe 5

$$d\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \frac{x}{2\sqrt{xy}} \\ \cos(e^x + e^y) \cdot e^x, & \cos(e^x + e^y) \cdot e^y \end{pmatrix}$$

Die Funktion g der Tangentialebene lautet:

$$\vec{g}(x, y) = \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{g}(x, y) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sin(e^1 + e^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\sqrt{2}}, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos(e^1 + e^2) \cdot e^1, & \cos(e^1 + e^2) \cdot e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (y - 2) \\ \sin(e(1 + e)) + \cos(e(1 + e))e \cdot (x - 1) + \cos(e(1 + e))e^2 \cdot (y - 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

schreibe nun sin statt sin(e(1+e)) und cos statt cos(e(1+e))

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + x - 1 + \frac{y}{2} - 1) \\ \sin - e \cdot \cos - 2\cos e^2 + \cos \cdot e \cdot x + \cos \cdot e^2 \cdot y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{y}{2}) \\ \sin - e \cdot \cos - 2\cos e^2 + \cos \cdot e \cdot x + \cos \cdot e^2 \cdot y \end{pmatrix} \end{aligned}$$