Übungsaufgaben Mathematik 2 Analysis für die Übungen am 15.4 und 18.4.2025

7. April 2025

Aufgabe 1

Es sei f auf dem Intervall $(-r, r)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickelbar ($r > 0$. Beweisen Sie:

a) Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in (-r, r)$, so kommen in der Taylorreihe von f nur gerade Exponenten vor, d.h. sie hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}$.

b) Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in (-r, r)$, so kommen in der Taylorreihe von f nur ungerade Exponenten vor, d.h. sie hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion arctan in $x_0 = 0$. Benutzen Sie das Ergebnis zur näherungsweisen Berechnung der Zahl π. (Verwenden Sie hierzu z.B. $\tan(\pi/4) = 1$.)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ und untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz. Begründen Sie das Ergebnis!

Aufgabe 4

Beweisen Sie, daß das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{x}$ mit sich selbst gleich dem Quadrat seines Betrags (Norm) ist.