

Übungsaufgaben Mathematik 2 Analysis für die Übungen am 7.11 und 8.11. 2024

27. Oktober 2024

Aufgabe 1

Es sei f auf dem Intervall $(-r, r)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickelbar ($r > 0$). Beweisen Sie:

- a) Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in (-r, r)$, so kommen in der Taylorreihe von f nur gerade Exponenten vor, d.h. sie hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$.
- b) Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in (-r, r)$, so kommen in der Taylorreihe von f nur ungerade Exponenten vor, d.h. sie hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion \arctan in $x_0 = 0$. Benutzen Sie das Ergebnis zur näherungsweise Berechnung der Zahl π . (Verwenden Sie hierzu z.B. $\tan(\pi/4) = 1$.)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ und untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz. Begründen Sie das Ergebnis!

Aufgabe 4

Beweisen Sie, daß das Skalarprodukt eines Vektors \vec{x} mit sich selbst gleich dem Quadrat seines Betrags (Norm) ist.