

Mathematik 2  
Analysis mehrerer Veränderlicher

Wintersemester 2024 Prof. Ekkehard Löhmann

Hochschule Ravensburg-Weingarten

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Computeralgebra</b>	<b>1</b>
1.1	Kurze Einführung in Mathematica . . . . .	1
1.1.1	Einige Beispiele als Starthilfe . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Taylor-Reihen</b>	<b>6</b>
2.1	Taylor-Formel . . . . .	8
2.2	Konvergenz der Taylor-Reihe . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung mehrerer reeller Variablen</b>	<b>13</b>
3.1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	13
3.2	Folgen und Reihen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	14
3.3	Topologie des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
3.4	Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ . . . . .	17
3.4.1	Höhenliniendarstellung . . . . .	18
3.4.2	Zeichnen von Funktionen . . . . .	19
3.5	Stetigkeit auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
3.6	Differenzieren von Funktionen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
3.6.1	Partielle Ableitungen . . . . .	20
3.6.2	Richtungsableitung, Gradient . . . . .	26
3.6.3	Höhere Partielle Ableitungen . . . . .	27
3.6.4	Das totale Differential . . . . .	29
3.6.5	Anwendung: Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	29
3.7	Extremalprobleme . . . . .	31
3.7.1	Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen . . . . .	31
3.7.2	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .	35
3.8	Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Anwendungen der Differentialrechnung</b>	<b>43</b>
4.1	Ausgleichsrechnung . . . . .	43
4.2	Die Methode der kleinsten Quadrate (Gauß) . . . . .	44
4.3	Statistische Rechtfertigung ( $\rightarrow$ Statistik) . . . . .	45
4.3.1	Fehler der Koeffizienten $a_i$ . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Differenzgleichungen</b>	<b>48</b>
5.1	Modelle . . . . .	48
5.2	Definition der Differenzgleichung . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>52</b>
6.1	Differentialgleichungen 1-ter Ordnung . . . . .	53
6.1.1	Geometrische Interpretation . . . . .	53
6.1.2	Anfangswertproblem . . . . .	54
6.1.3	Grundproblem bei Anfangswertaufgaben . . . . .	55
6.2	Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf . . . . .	56
6.2.1	Beweis der Existenz einer Lösung . . . . .	57
6.2.2	Beweis der Eindeigkeit einer gefundenen Lösung . . . . .	61
6.2.3	Beispiel für die Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf . . . . .	63

6.3	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	64
6.3.1	DGLn der Form $y' = f(x)$ . . . . .	64
6.3.2	DGLn mit getrennten Veränderlichen . . . . .	65
6.3.3	DGL der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ . . . . .	67
6.3.4	DGL der Form $y' = f(ax + by + c)$ . . . . .	68
6.3.5	Lineare DGL 1-ter Ordnung . . . . .	69
6.3.6	homogene lineare DGL . . . . .	69
6.3.7	Inhomogene lineare DGL . . . . .	70
6.4	Numerische Behandlung von DGLn . . . . .	72
6.4.1	Euler-Cauchy Verfahren . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Integralrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>78</b>
7.1	Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	84
7.2	Grundlegende Sätze . . . . .	87
7.3	Koordinatentransformation in Integralen . . . . .	89
7.3.1	Herleitung im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	90
7.3.2	Allgemein . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Grundlagen der Vektoranalysis</b> . . . . .	<b>93</b>
8.1	Der Laplace-Operator . . . . .	96

# 1 Computeralgebra

Computeralgebra = Symbolverarbeitung + Numerik + Grafik

## Erfolgreiche Systeme:

- Mathematica (S. Wolfram & Co.)
- Maple(ETH Zürich + Univ. Waterloo, Kanada)

## 1.1 Kurze Einführung in Mathematica

### 1.1.1 Einige Beispiele als Starthilfe

In[1]:= 3 + 2^3

Out[1]= 11

In[2]:= Sqrt[10]

Out[2]= Sqrt[10]

In[3]:= N[Sqrt[10]]

Out[3]= 3.16228

In[4]:= N[Sqrt[10],60]

Out[4]= 3.1622776601683793319988935444327185337195551393252168268575

In[5]:= Integrate[x^2 Sin[x]^2, x]

Out[5]= 
$$\frac{4 x^3 - 6 x \cos[2 x] + 3 \sin[2 x] - 6 x^2 \sin[2 x]}{24}$$

In[7]:= D[%, x]

Out[7]= 
$$\frac{12 x^2 - 12 x \cos[2 x]}{24}$$

In[8]:= Simplify[%]

Out[8]=  $x^2 \sin[x]$

In[9]:= Series[Exp[x], {x,0,6}]

Out[9]=  $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + 0[x]^7$

$$2 \quad 6 \quad 24 \quad 120 \quad 720$$

```
In[10]:= Expand[(x + 2)^3 + ((x - 5)^2 (x + y)^2)^3]
```

```
Out[10]= 8 + 12 x + 6 x2 + x3 + 15625 x6 - 18750 x7 + 9375 x8 - 2500 x9 +
> 375 x10 - 30 x11 + x12 + 93750 x5 y - 112500 x6 y + 56250 x7 y -
> 15000 x8 y + 2250 x9 y - 180 x10 y + 6 x11 y + 234375 x4 y2 -
> 281250 x5 y2 + 140625 x6 y2 - 37500 x7 y2 + 5625 x8 y2 - 450 x9 y2 +
> 15 x10 y2 + 312500 x3 y3 - 375000 x4 y3 + 187500 x5 y3 - 50000 x6 y3 +
> 7500 x7 y3 - 600 x8 y3 + 20 x9 y3 + 234375 x2 y4 - 281250 x3 y4 +
> 140625 x4 y4 - 37500 x5 y4 + 5625 x6 y4 - 450 x7 y4 + 15 x8 y4 +
> 93750 x5 y5 - 112500 x2 y5 + 56250 x3 y5 - 15000 x4 y5 + 2250 x5 y5 -
> 180 x6 y5 + 6 x7 y5 + 15625 y6 - 18750 x y6 + 9375 x2 y6 - 2500 x3 y6 +
> 375 x4 y6 - 30 x5 y6 + x6 y6
```

```
In[11]:= Factor[%]
```

```
Out[11]= (2 + x + 25 x2 - 10 x3 + x4 + 50 x y - 20 x2 y + 2 x3 y + 25 y2 -
> 10 x y2 + x2 y2) (4 + 4 x - 49 x2 - 5 x3 + 633 x4 - 501 x5 + 150 x6 -
> 20 x7 + x8 - 100 x y - 10 x2 y + 2516 x3 y - 2002 x4 y + 600 x5 y -
> 80 x6 y + 4 x7 y - 50 y2 - 5 x y2 + 3758 x2 y2 - 3001 x3 y2 +
> 900 x4 y2 - 120 x5 y2 + 6 x6 y2 + 2500 x y3 - 2000 x2 y3 + 600 x3 y3 -
> 80 x4 y3 + 4 x5 y3 + 625 y4 - 500 x y4 + 150 x2 y4 - 20 x3 y4 + x4 y4)
```

```
In[12]:= InputForm[%7]
```

```
Out[12]//InputForm= (12*x^2 - 12*x^2*Cos[2*x])/24

In[20]:= Plot[Sin[1/x], {x,0.01,Pi}]

Out[20]= -Graphics-

In[42]:= Plot3D[x^2 + y^2, {x,-1,1}, {y,0,1}]

Out[42]= -SurfaceGraphics-

In[43]:= f[x_,y_] := Sin[(x^2 + y^3)] / (x^2 + y^2)

In[44]:= f[2,3]

          Sin[31]
Out[44]= -----
          13

In[45]:= ContourPlot[x^2 + y^2, {x,-1,1}, {y,-1,1}]

Out[45]= -SurfaceGraphics-

In[46]:= Plot3D[f[x,y], {x,-Pi,Pi}, {y,-Pi,Pi}, PlotPoints -> 30,
          PlotLabel -> "Sin[(x^2 + y^3)] / (x^2 + y^2)", PlotRange -> {-1,1}]

Out[46]= -SurfaceGraphics-

In[47]:= ContourPlot[f[x,y], {x,-2,2}, {y,-2,2}, PlotPoints -> 30,
          ContourSmoothing -> True, ContourShading -> False,
          PlotLabel -> "Sin[(x^2 + y^3)] / (x^2 + y^2)"]

Out[47]= -ContourGraphics-

In[52]:= Table[x^2, {x, 1, 10}]

Out[52]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

In[53]:= Table[{n, n^2}, {n, 2, 20}]

Out[53]= {{2, 4}, {3, 9}, {4, 16}, {5, 25}, {6, 36}, {7, 49}, {8, 64},
> {9, 81}, {10, 100}, {11, 121}, {12, 144}, {13, 169}, {14, 196},
> {15, 225}, {16, 256}, {17, 289}, {18, 324}, {19, 361}, {20, 400}}

In[54]:= Transpose[%]

Out[54]= {{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
> 20}, {4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256,
> 289, 324, 361, 400}}

In[60]:= ListPlot[Table[Random[]+Sin[x/10], {x,0,100}]]

Out[60]= -Graphics-

In[61]:= x = Table[i, {i,1,6}]

Out[61]= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
In[62]:= A = Table[i*j, {i,1,5}, {j,1,6}]
```

```
Out[62]= {{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {2, 4, 6, 8, 10, 12}, {3, 6, 9, 12, 15, 18},
> {4, 8, 12, 16, 20, 24}, {5, 10, 15, 20, 25, 30}}
```

```
In[63]:= A.x
```

```
Out[63]= {91, 182, 273, 364, 455}
```

```
In[64]:= x.x
```

```
Out[64]= 91
```

```
In[71]:= B = A.Transpose[A]
```

```
Out[71]= {{91, 182, 273, 364, 455}, {182, 364, 546, 728, 910},
> {273, 546, 819, 1092, 1365}, {364, 728, 1092, 1456, 1820},
> {455, 910, 1365, 1820, 2275}}
```

```
In[72]:= B - IdentityMatrix[5]
```

```
Out[72]= {{90, 182, 273, 364, 455}, {182, 363, 546, 728, 910},
> {273, 546, 818, 1092, 1365}, {364, 728, 1092, 1455, 1820},
> {455, 910, 1365, 1820, 2274}}
```

### Mathematica – wichtige Befehle

	%	letzten Befehl wiederholen
	%n	Befehl Nr. n wiederholen
	?f	Hilfe zur Funktion f
	??f	mehr Hilfe zu f
	f[x_,y_] := x^2 * Cos[y]	Funktion $f(x,y)$ definieren
	a = 5	Variable a wird mit 5 belegt
	f = x^2 * Cos[y]	Variable f wird mit Ausdruck belegt (f ist Abkürzung für $x^2$ , aber keine Funktion!)
	D[f[x,y],x]	part. Abl. von f nach x
	Integrate[f[x,y],y]	Stammfunktion von f bez. y
	Simplify[expr]	vereinfachen
	Expand[expr]	auswerten
	Solve[f[x]==g[x]]	Gleichung lösen
	^C	Abbruch
	InputForm[Expr]	Umwandeln in Eingabenotation
	TeXForm[Expr]	Umwandeln in TeX-Notation
	FortranForm[Expr]	Umwandeln in Fortran-Notation
	CForm[Expr]	Umwandeln in C-Notation
	ReadList["daten.dat", Number, Number]	Liest 2-spaltige Wertetabelle aus Datei
	Table[f[n], {n, n_min, n_max}]	Liste mit Werten $f(n_{min}), \dots, f(n_{max})$
	Plot[f[x], {x, x_min, x_max}]	Graph zeichnen
	ListPlot[Liste]	Wertetabelle zeichnen
	Plot3D[f[x,y], {x, x_min, x_max}, {y, y_min, y_max}]	Graph zeichnen
	ContourPlot[f[x,y], {x, x_min, x_max}, {y, y_min, y_max}]	Höhenlinien zeichnen
	Display["Dateiname", %]	auf Postcript-Datei schreiben

**Beispiel 1.1** (Berechnung von Quadratwurzeln)

```
(***** Wurzel[2] iterativ *****)
sqrt[a_,genauigk_] := Module[{x, xn, delta, n},
For[{delta=9999999; n = 1; x=a}, delta > 10^(-genauigk), n++,
  xn = x;
  x = 1/2(x + a/x);
  delta = Abs[x - xn];
  Print["n = ", n, " x = ", N[x,2*genauigk], " delta = ", N[delta]];
];
N[x,genauigk]
]
sqrt::usage = "sqrt[a,n] computes the square root of a to n digits."

Table[sqrt[i,10], {i,1,20}]

(***** Wurzel[2] rekursiv *****)
x[n_,a_] := 1/2 (x[n-1,a] + a/x[n-1,a])
x[1,a_] := a
```



## 2 Taylor-Reihen

Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

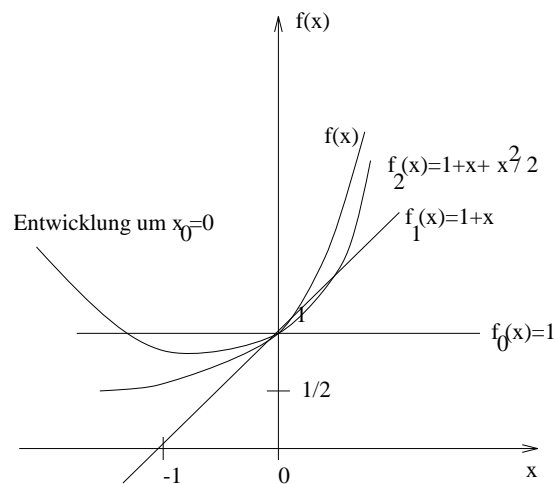
**Ziele:**

1. Einfache Darstellung von komplexen Funktionen durch Polynome d.h.:

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

2. Approximation von Funktionen in der Umgebung eines Punktes  $x_0$ .

**Beispiel 2.1**  $f(x) = e^x$



- 0-te Näherung:  $f_0(x) = 1$
- 1-te Näherung:  $f_1(x) = 1 + x$
- 2-te Näherung:  $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

**Ansatz:**

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

gesucht sind Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  derart, daß  $f(x) = P(x) + R_n(x)$ ,  $R_n =$  Restglied mit  $f(0) = P(0)$ ,  $f'(0) = P'(0)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0)$

**Berechnung der Koeffizienten:**

$$P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2a_2, \quad \dots, \quad P^{(k)}(0) = k!a_k, \quad \dots$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = k!a_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\Rightarrow f(x) = P(x) + R_n(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P(x)} + R_n(x)$$

**Beispiel 2.2**  $f(x) = e^x$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

**Allgemeiner Fall:** Entwicklung von  $f$  um  $x_0 \neq 0$ .

$$f^{(n)}(0) \mapsto f^{(n)}(x_0) \quad x \mapsto x - x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$
$$\underline{\underline{R_n(x) = ?}}$$

## 2.1 Taylor-Formel

**Satz 2.1** (Taylorsche Formel)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für  $x \in I, x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

**Beweis:** durch Induktion nach  $n$

$n=0$  z. zeigen:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

gilt wegen

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

$n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = - \int_{x_0}^x \left( \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} \right)' f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \left[ - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt}_{=R_{n+1}(x)} \end{aligned}$$

## 2.2 Konvergenz der Taylor-Reihe

**Satz 2.2** (Lagrange'sche Form des Restgliedes)

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar und  $x_0, x \in I$ . Dann gibt es ein  $z$  zwischen  $x_0$  und  $x$  so daß

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**Beispiel 2.3**  $f(x) = e^x$  mit Satz 1 und 2 erhalten wir

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}}_{=R_n(x)} \quad \text{für } |z| < |x|$$

**Konvergenz:**

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} =: b_n$$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{|x|}{n+2} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

wegen Quotientenkriterium folgt  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ist konvergent.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Damit ist die Taylorreihe für  $e^x$  konvergent gegen  $f(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ !

**Beispiel 2.4** Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx.$$

Da die Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$  keine einfache Stammfunktion besitzt, kann sie nicht elementar integriert werden. Wir berechnen einen Näherungswert für das Integral, indem wir das Taylorpolynom vom Grad 3 integrieren:

$$\sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{1/2} \approx 1 + \frac{x^3}{2}$$

also

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx \int_0^1 \left( 1 + \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[ x + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{9}{8} = 1.125$$

Der exakte Wert des Integrals liegt bei etwa 1.11145, d.h. unser Näherungswert ist auf etwa 1% genau.

|| **Definition 2.1** Die Reihe  $T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  heißt Taylorreihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$ .

**Bemerkung:**

1. Für  $x = x_0$  ist jede Taylorreihe konvergent.
2. Aber für  $x \neq x_0$  ist nicht jede Taylorreihe konvergent.
3. Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen  $x \in I$  gegen  $f(x)$  für die das Restglied aus Satz 1 (2) gegen 0 konvergiert.
4. Falls die Taylorreihe von  $f$  konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen  $f$ .  
→ Beispiel in den Übungen !

**Beispiel 2.5** (*Logarithmusreihe*) Für  $0 < x \leq 2$  gilt

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \dots$$

**Beweis**

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}, \quad \ln(x)'' = -\frac{1}{x^2}, \quad \ln(x)''' = \frac{2}{x^3}, \quad \ln(x)^{(4)} = -\frac{6}{x^4}, \quad \ln(x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Vollständige Induktion:

$$\ln(x)^{(n+1)} = (\ln(x)^{(n)})' = \left( (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n} \right)' = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Entwicklung um  $x_0 = 1$

$$T_{\ln,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^{(k)}}{k!} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \dots$$

**Definition 2.2** *Konvergiert die Taylorreihe für alle  $x$  in einem Intervall  $I$ , so heißt  $I$  **Konvergenzbereich**.  
Ist  $I = [x_0 - r, x_0 + r]$  oder  $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ , so heißt  $r$  **Konvergenzradius** der Taylorreihe.*

**Satz 2.3** (*Binomische Reihe*)

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $|x| < 1$  gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$$

mit

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{falls } n \neq 0 \\ 1 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

**Beweis: 3 Teile:**

a) Berechnung der Taylorreihe um  $x_0 = 0$

b) Konvergenz der Reihe für  $|x| < 1$

c) Taylorreihe konvergiert gegen  $f$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} &= \binom{\alpha}{k} \\ \Rightarrow T_{f,0}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \end{aligned}$$

**Bemerkung:** für  $k > \alpha$  ist  $f^{(k)}(x) = 0$ , wenn  $\alpha \in \mathbb{N}!$   $\Rightarrow$  die Reihe bricht ab.

**Beispiel:**

$$f(x) = (1+x)^2 \quad : \quad T_f(x) = 1x^2 + 2x + 1$$

b) Konvergenzbeweis mit Quotientenkriterium

Sei  $\alpha \notin \mathbb{N}$  und  $x \neq 0$ . Sei  $a_n = \binom{\alpha}{n} x^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = |x| \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = |x| < 1 \end{aligned}$$

Nun existiert zu  $q$  mit  $|x| < q < 1$  ein  $n_0$ , so daß  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall n \geq n_0$ .

c) zu zeigen: das Restglied  $R_n(x)$  konvergiert für  $|x| < 1$  gegen Null. (Beweis weggelassen)

**Beispiel 2.6 Relativistische Massenzunahme**

Einstein: Gesamtenergie:  $E = mc^2$  Bewegungsenergie:  $E_{kin} = (m - m_0)c^2$

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

**zu zeigen:** für  $v \ll c$  gilt  $E_{kin} \approx \frac{1}{2}m_0v^2$

$$E_{kin} = (m - m_0)c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0c^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

für  $x \ll 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow E_{kin} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) m_0 c^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

### 3 Differentialrechnung mehrerer reeller Variablen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

oder

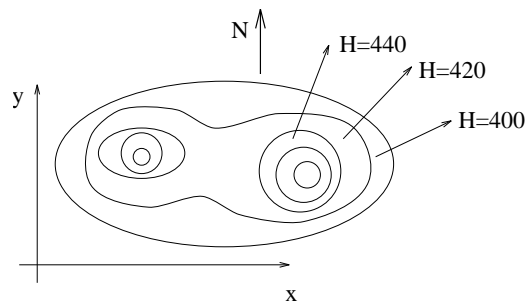
$$\vec{x} \mapsto y = f(\vec{x})$$

**Beispiel 3.1**  $n = 2$

1. topographische Landkarte

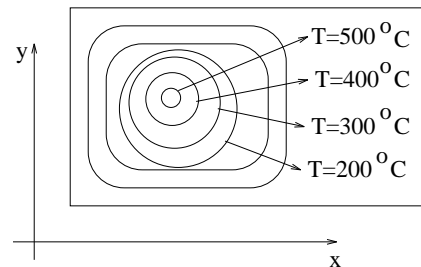
$$\text{Ort} \mapsto \text{Höhe}$$

$$(x, y) \mapsto h(x, y)$$

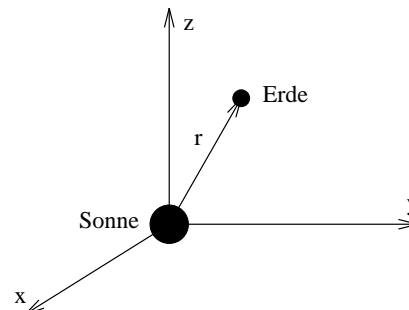


2. Temperaturverteilung auf einer Platte

$$(x, y) \mapsto T(x, y)$$



3. Gravitationspotential einer kugelsymmetrischen Masse (potentielle Energie einer Masse im Feld)



$$V(x, y, z) = \frac{f}{r} = \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

#### 3.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

bekannt aus linearer Algebra.

Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen

Vektoren sind n-Tupel: Rechenregeln übertragen sich von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$

**Addition:** komponentenweise



**Multiplikation:** Skalarprodukt, Vektorprodukt, Multiplikation mit Skalar

**Definition 3.1** Jede Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$  heißt **Norm** gdw.

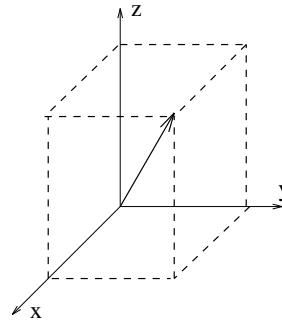
1.  $\|\vec{x}\| = 0$  gdw.  $\vec{x} = 0$
2.  $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
3.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  *Dreiecksungleichung*

**Definition 3.2** (Euklidische Norm)

Die Funktion  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \vec{x} \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  heißt **Euklidische Norm** des Vektors  $\vec{x}$ .

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 : \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$



**Lemma:** Die Euklidische Norm ist eine Norm.

**Satz 3.1**

Für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt  $\vec{x}^2 = \vec{x}\vec{x} = |\vec{x}|^2$

Beweis als Übung.

**Bemerkung:** Das Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$  induziert die Euklidische Norm.

## 3.2 Folgen und Reihen im $\mathbb{R}^n$

analog zu Folgen und Reihen in  $\mathbb{R}$

**Definition 3.3** Eine Abbildung  $N \rightarrow \mathbb{R}^n, n \mapsto \vec{a}_n$  wird *Folge* genannt.

**Schreibweise:**  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beispiel:

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \dots = \left( \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

**Definition 3.4** Eine Folge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Vektoren  $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$  heißt **konvergent** gegen  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

so daß

$$|\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

**Schreibweise:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}$

### Satz 3.2

Eine Vektorfolge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen  $\vec{a}$ , wenn alle ihre Koordinatenfolgen gegen entsprechende Koordinaten von  $\vec{a}$  konvergieren. (*Beweis als Übung*)

**Schreibweise:**

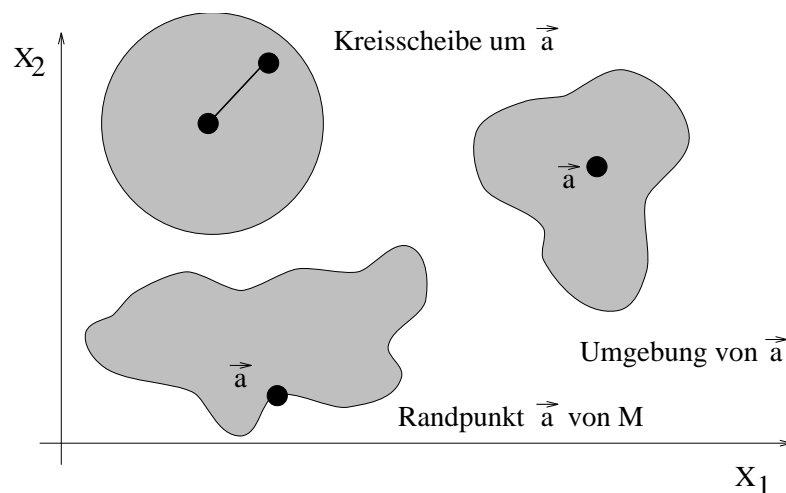
$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix} \quad (\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$$

**Bemerkung:** Mit Satz 3.2 lassen sich alle Eigenschaften und Sätze für Folgen von Zahlen auf Vektorfolgen sinngemäß übertragen.

### 3.3 Topologie des $\mathbb{R}^n$

**Definition 3.5** Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  ist  $|\vec{x} - \vec{y}|$  der **Abstand** von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ .

$\mathbb{R}^2$ :



**Definition 3.6**

- a) Die Menge  $\bar{K}_{\vec{a},r} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| \begin{matrix} \leq \\ (<) \end{matrix} r \right\}$  mit  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, r > 0$  heißt abgeschlossene (offene) **Kugel** um  $\vec{a}$  mit Radius  $r$ .
- b) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Umgebung** des Punktes  $\vec{a}$ , wenn sie eine offene Kugel um  $\vec{a}$  umfasst.

**Definition 3.7**

- a) Ein Punkt  $\vec{a}$  heißt **Randpunkt** einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , wenn in jeder Umgebung von  $\vec{a}$  mindestens ein Punkt aus  $M$  liegt sowie mindestens ein Punkt aus  $\mathbb{R}^n$ , der nicht zu  $M$  gehört. Die Menge der Randpunkte von  $M$  heißt **Rand** von  $M$ , symbolisiert durch  $\partial M$ .
- b) Ein Punkt  $\vec{a} \in M$ , der nicht Randpunkt ist, heißt **innerer Punkt** von  $M$ .  $\vec{a}$  ist also genau dann ein innerer Punkt von  $M$ , wenn eine ganze Umgebung von  $\vec{a}$  in  $M$  enthalten ist. Die Menge der inneren Punkte von  $M$  heißt **Inneres** von  $M$ , symbolisiert durch  $\overset{\circ}{M}$ .
- c) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht (also keine Randpunkte enthält).
- d) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **abgeschlossen**, wenn sie ihren Rand enthält.
- e) Die Vereinigung einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , mit ihrem Rand heißt die **abgeschlossene Hülle** von  $M$ , symbolisiert durch  $\bar{M}$ .

$\mathbb{R}^n$  und die leere Menge sind sowohl offen als auch abgeschlossen (denn ihr Rand ist leer). Alle anderen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind offen oder abgeschlossen oder keines von beiden.

**Satz 3.3**

- a) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge  $\mathbb{R}^n \setminus M$  offen ist.
- b) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann abgeschlossen, wenn mit jeder konvergenten Folge  $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  auch der zugehörige Grenzwert  $\vec{a}$  in  $M$  liegt.

**Beweis:**

- a) (als Übung)

b) “ $\Leftarrow$ ”: zu zeigen: der Rand gehört zu  $M$ . Sei also  $\vec{a} \in \partial M$ . Dann gibt es ein  $k_0$  so, daß für  $k \geq k_0$  in jeder Kugel  $K_{\vec{a}, \frac{1}{k}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ein Punkt  $\vec{a}_k$  aus  $M^\circ$  liegt. Die Folge  $(\vec{a}_k)$  konvergiert gegen  $\vec{a}$ . Damit liegt  $\vec{a}$  in  $M$ . Also ist der ganze Rand im  $M$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $M$  abgeschlossen, d.h.  $\mathbb{R}^n \setminus M$  ist offen,

$\Rightarrow$  jeder Punkt aus  $\mathbb{R}^n \setminus M$  hat eine Umgebung, die ganz in  $\mathbb{R}^n \setminus M$  liegt, die also keinen Punkt aus  $M$  enthält.

$\Rightarrow$  kein Punkt aus  $\mathbb{R}^n \setminus M$  kann Grenzwert einer Folge aus  $M$  sein

$\Rightarrow$  Jede konvergente Folge aus  $M$  hat ihren Grenzwert in  $M$ .

### Definition 3.8

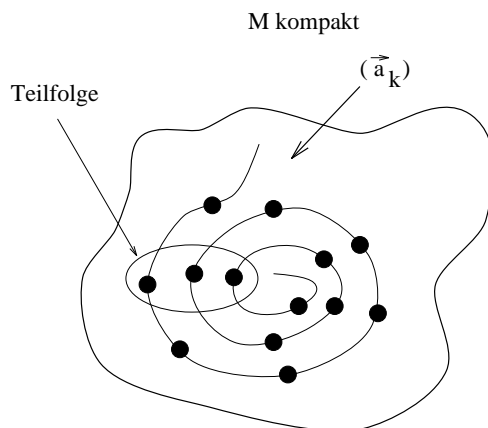
a) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, wenn es ein  $r > 0$  gibt mit  $|\vec{x}| \leq r$  für alle  $\vec{x} \in M$  (d.h. wenn  $M$  in einer Kugel um  $\vec{0}$  liegt).

b) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition 3.9 Eine Folge  $(b_k)$  heißt Teilfolge der Folge  $(a_k)$ , wenn sie durch Weglassen von Folgengliedern aus  $(a_k)$  erzeugt werden kann.

### Satz 3.4

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn jede Folge  $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in  $M$  liegt.



### 3.4 Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

$m = 1$ : Funktionen  $f$  von  $D \subset \mathbb{R}^n$  nach  $B \subset \mathbb{R}$  haben die Form

$$f : D \rightarrow B \quad , \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

Beispiel:  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + \ln x_2)$

$m \neq 1$ : Funktionen  $f$  von  $D \subset \mathbb{R}^n$  nach  $B \subset \mathbb{R}^m$  haben die Form

$$f : D \rightarrow B \quad , \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

1.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3} \\ \cos x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix}$$

2. Wetterwerte: Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit auf jedem Punkt der Erde

$$f : [0^\circ, 360^\circ] \times [-90^\circ, 90^\circ] \rightarrow [-270, \infty] \times [0, \infty] \times [0, 100\%]$$

$$\begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \text{Temperatur}(l, b) \\ \text{Luftdruck}(l, b) \\ \text{Luftfeuchtigkeit}(l, b) \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Die  $m$  Komponenten  $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$  können unabhängig voneinander betrachtet (analysiert) werden. Daher im Folgenden hauptsächlich Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 3.4.1 Höhenliniendarstellung

**Definition 3.10** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2, B \subset \mathbb{R}, c \in B, f : D \rightarrow B$ . Die Menge  $\{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = c\}$  heißt *Höhenlinie* der Funktion  $f$  zum Niveau  $c$ .

**Beispiel 3.2**  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

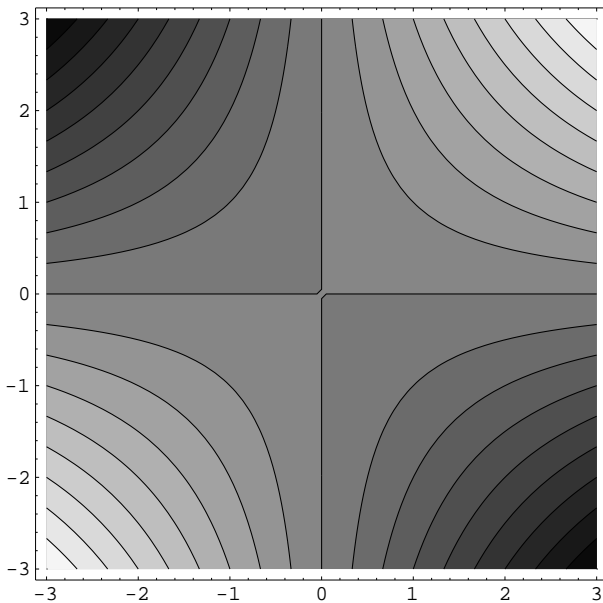
$$x_1 x_2 = c$$

für

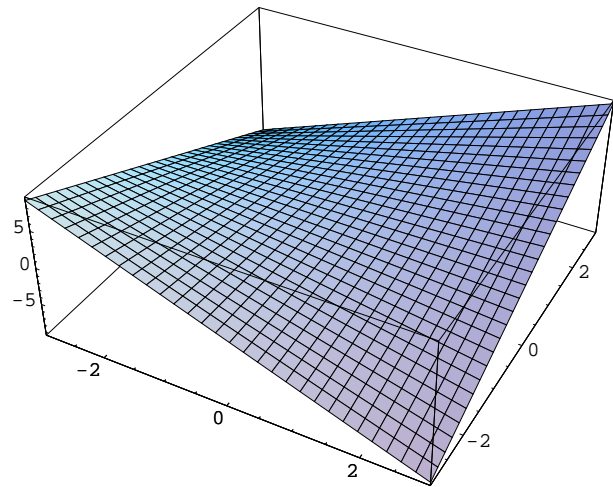
$$x_1 \neq 0 : x_2 = \frac{c}{x_1}$$

(Hyperbeln)

$$c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 0$$



```
ContourPlot[x y, {x,-3,3}, {y,-3,3},
  Contours -> {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,-1,
    -2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9},
  PlotPoints -> 60]]
```



```
Plot3D[x y, {x,-3,3}, {y,-3,3},
  PlotPoints -> 30]]
```

### 3.4.2 Zeichnen von Funktionen

zurückführen auf eindimensionalen Funktionen.

1. Verhalten auf den Achsen:

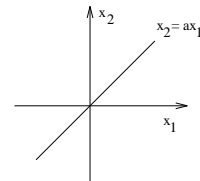
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

2. Verhalten auf Geraden durch 0:

$$x_2 = ax_1$$

**Beispiel:**  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \Rightarrow f(x_1, ax_1) = ax_1^2$



3. Verhalten auf Parallelen zu den Achsen:

$$x_1 = c \quad , \text{ bzw. } \quad x_2 = c$$

**Beispiel:**

$$f(x_1, c) = x_1 c$$

$$f(c, x_2) = c x_2$$

### 3.5 Stetigkeit auf $\mathbb{R}^n$

analog zur Stetigkeit von Funktionen einer Variablen

**Definition 3.11** Sei  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion und  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Wenn es mindestens eine Folge  $(\vec{a}_n)$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ , dann schreibt man:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{c},$$

falls für jede Folge  $(\vec{x}_n), \vec{x}_n \in D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{c}$$

**Definition 3.12** (Stetigkeit)

Sei  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion und  $\vec{a} \in D$ . Die Funktion  $\vec{f}$  heißt **stetig** im Punkt  $\vec{a}$ , falls  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ .  $\vec{f}$  heißt stetig in  $D$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

**Bemerkung:** Die beiden obigen Definitionen sind analog zum 1-dimensionalen Fall.

#### Satz 3.5

Sind  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^m, h: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $\vec{x}_0 \in D$ , so ist auch  $\vec{f} + \vec{g}, \vec{f} - \vec{g}, \vec{f}\vec{g}$  und  $\frac{\vec{f}}{h}$  (falls  $h(\vec{x}_0) \neq 0$ ) stetig in  $\vec{x}_0$ .

### 3.6 Differenzieren von Funktionen im $\mathbb{R}^n$

#### 3.6.1 Partielle Ableitungen

##### Beispiel 3.3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2x_2^3$$

halte  $x_2 = \text{const.}$ , und berechne die 1-dim. Ableitung von  $f$  nach  $x_1$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1x_2^3$$

analog mit  $x_1 = \text{const.}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1^2x_2^2$$

**zweimal ableiten:**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 12x_1x_2^2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 12x_1x_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

**Beispiel 3.4**

$$\Phi(u, v, w) = uv + \cos w$$

$$\Phi_u(u, v, w) = v$$

$$\Phi_v(u, v, w) = u$$

$$\Phi_w(u, v, w) = -\sin w$$

**Bemerkung:** Die Partielle Ableitung einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach  $x_k$  wird berechnet, indem man alle Variablen außer  $x_i$  konstant hält und nach  $x_i$  differenziert.

**Definition 3.13** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Funktion  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist in einem inneren Punkt  $\vec{x} \in D$  **partiell differenzierbar nach  $x_k$** , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - \vec{f}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

existiert. Der Grenzwert heißt **partielle Ableitung** von  $\vec{f}$  nach  $x_k$  im Punkt  $\vec{x}$ .  $f$  heißt **partiell dfb.** falls  $f$  partiell dfb. nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist.

**Schreibweise:**

$$\vec{f}_{x_k}(x_1, \dots, x_n) := D_k \vec{f}(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

**Anschauliche Interpretation im  $\mathbb{R}^2$ :**

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

setze  $x_2 = b = \text{const.}$  schneide den Graphen von  $f$  mit der Ebene  $x_2 = b$ , bilde die Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, b)$ .

**Beispiel 3.5 Ideale Gase**

Es gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{\partial V}{\partial T}$$

$$\frac{pV}{T} = R \quad (R = \text{const.} \quad p, V, T > 0)$$

**Beweis:**

$$V = R \frac{T}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2} \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \underline{\underline{\frac{R}{p}}}$$

$$p = \frac{RT}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{RT}{p^2} \frac{R}{V} = -\frac{RT}{p^2} \frac{Rp}{RT} = \underline{\underline{-\frac{R}{p}}}$$



**Definition 3.14**

Sei  $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  und  $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$  in  $\vec{x} = \vec{x}_0$  partiell differenzierbar, d.h. alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\vec{x}_0)$  ( $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$ ) existieren. Die Matrix:

$$\vec{f}'(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

wird **Jacobi-Matrix** oder **Ableitungsmatrix** genannt.

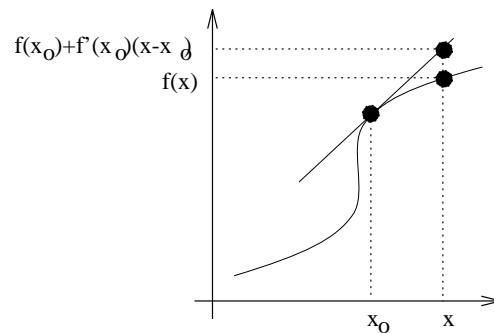
**Beispiel 3.6** Linearisierung einer Funktion:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  in Punkt  $\vec{x}_0$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ \sin(x_1 + x_2) \\ \ln(x_1) + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{x_1} & 1 \end{pmatrix}$$

1-dimensional

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Linearisierung  $\vec{g}$  von  $\vec{f}$  in Punkt  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{g}(x_1, x_2) = \vec{f}(\pi, 0) + \vec{f}'(\pi, 0) \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -x_1 - x_2 + \pi \\ \frac{x_1}{\pi} + x_2 + \ln \pi - 1 \end{pmatrix}$$

**Definition 3.15** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ( $D \subset \mathbb{R}^n$ ) heißt (total) **differenzierbar** in einem inneren Punkt  $\vec{x}_0$  von  $D$ , wenn sie in  $\vec{x}_0$  partiell differenzierbar ist und in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{k}(\vec{x})$$

wobei für  $\vec{k} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{|\vec{k}(\vec{x})|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0$$

**Anw. v. Def. auf eindim. Fall:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{k(x)}{x - x_0}$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0$$

**Satz 3.6**

$\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$ ) ist in einem inneren Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  differenzierbar, genau dann wenn alle partiellen Ableitungen von  $\vec{f}$  in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  existieren und in  $\vec{x}_0$  stetig sind.

**Definition 3.16** Wird bei einer differenzierbaren Funktion  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  der Term  $\vec{k}(\vec{x})$  weggelassen, so ist die neue Funktion  $\vec{g}$

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

eine affin lineare Abbildung, die sog. **Tangentialabbildung**. Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Graph von

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

die **Tangentialebene** an  $f$  im Punkt  $\vec{x}_0$ .

**Bemerkung:** Für  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$  wird  $\vec{k}(\vec{x})$  sehr klein, d.h. in der Nähe von  $\vec{x}_0$  stellt  $\vec{g}$  eine gute Approximation von  $\vec{f}$  dar.

**Frage:** Die Ableitung einer Funktion  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{x}_0$  ist eine Matrix  $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ . Was ist dann  $(\vec{f} \circ \vec{h})'(x_0) = f'(h(x_0))'$ ?

**Eindim.:**  $(f \circ h)'(x_0) = f'(h(x_0))h'(x_0)$

**Satz 3.7** (Kettenregel)

Sei  $\vec{h} : C \rightarrow D (C \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^p)$  differenzierbar in  $\vec{x}_0 \in C$  und  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $\vec{z}_0 = \vec{h}(\vec{x}_0)$ . Dann ist auch  $\vec{f} \circ \vec{h} : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar und es gilt:

$$(\vec{f} \circ \vec{h})'(x_0) = \vec{f}'(\vec{z}_0)\vec{h}'(\vec{x}_0)$$

**Bemerkung:** Die Ableitungsmatrix von  $f \circ h$  ist also das Produkt der Ableitungsmatrizen  $f'$  und  $h'$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{z}) &= \vec{f}(\vec{z}_0) + \vec{f}'(\vec{z}_0)(\vec{z} - \vec{z}_0) + \vec{k}(\vec{z}) \\ \vec{z} = \vec{h}(\vec{x}) &= \vec{h}(\vec{x}_0) + \vec{h}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{m}(\vec{x}) \\ (\vec{f} \circ \vec{h})(\vec{x}) &= \vec{f}(\vec{h}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{z}) = \vec{f}(\vec{z}_0) + \vec{f}'(\vec{z}_0) \underbrace{(\vec{h}(\vec{x}) - \vec{h}(\vec{x}_0))}_{\vec{s}(\vec{x})} + \vec{k}(\vec{z}) \\ &= \vec{f}(\vec{z}_0) + \vec{f}'(\vec{z}_0)(\vec{h}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{m}(\vec{x})) + \vec{k}(\vec{z}) \\ &= \vec{f}(\vec{z}_0) + \vec{f}'(\vec{z}_0)\vec{h}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{s}(\vec{x}) \end{aligned}$$

mit

$$\vec{s}(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{z}_0)\vec{m}(\vec{x}) + \vec{k}(\vec{h}(\vec{x}))$$

bleibt zu zeigen

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{|\vec{s}(\vec{x})|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0$$

**Beispiel 3.7** Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Differenzierbarkeit:**  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  differenzierbar, da aus differenzierbaren Funktionen durch Summe, Produkt, Quotient, zusammengesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \frac{y}{y} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$$

$\Rightarrow$  partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x}$  in  $(0, 0)$  nicht stetig.  $\Rightarrow f$  ist im Punkt  $(0, 0)$  nicht differenzierbar

- Symmetrien:**
1.  $f$  symmetrisch bezüglich Vertauschung von  $x$  und  $y$ , d.h. bezüglich der Ebene  $y = x$ .
  2.  $f$  symmetrisch bezüglich Vertauschung von  $x$  und  $-y$ , d.h. bezüglich der Ebene  $y = -x$ .
  3.  $f(-x, y) = -f(x, y)$ , d.h.  $f$  ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.
  4.  $f(x, -y) = -f(x, y)$ , d.h.  $f$  ist symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse.

**Höhenlinien:**

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \Leftrightarrow xy = c\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 y^2 = c^2(x^2 + y^2)$$

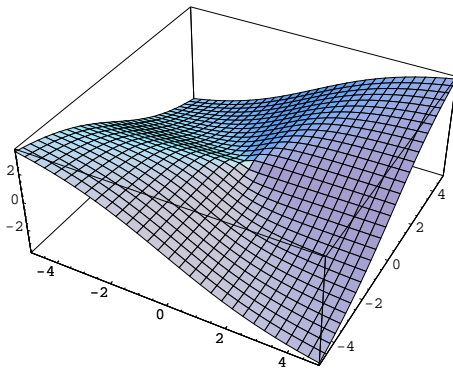
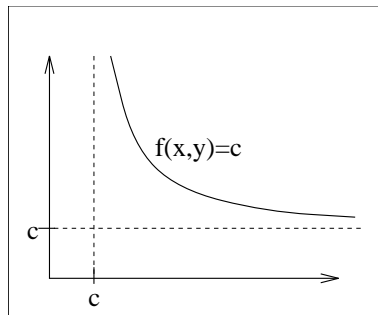
$$\Leftrightarrow y^2(x^2 - c^2) = c^2 x^2 \Rightarrow y = \pm \frac{cx}{\sqrt{x^2 - c^2}} \Rightarrow$$

Höhenlinien:

$$y = \begin{cases} \frac{cx}{\sqrt{x^2 - c^2}} & \text{falls } c > 0, x > 0 \text{ (1. Quadr.) und } c < 0, x < 0 \text{ (2. Quadr.)} \\ -\frac{cx}{\sqrt{x^2 - c^2}} & \text{falls } c > 0, x < 0 \text{ (3. Quadr.) und } c < 0, x > 0 \text{ (4. Quadr.)} \end{cases}$$

Vorzeichen in den Quadranten:

-	+
+	-



**Stetigkeit:**  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  stetig, da aus stetigen Funktionen durch Summe, Produkt, Quotient, zusammengesetzt.

Stetigkeit in  $(0,0)$ :

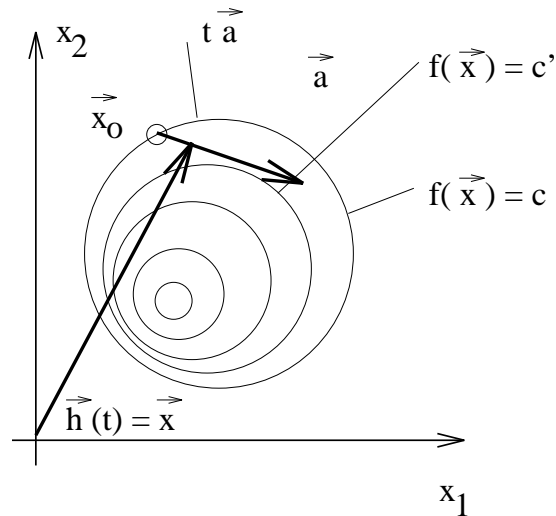
Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so daß  $|\vec{x}| = \varepsilon$ , d.h.  $\varepsilon = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}$

$$\Rightarrow f(x, y) = \pm \frac{x\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}{\varepsilon} = \pm \frac{x\varepsilon\sqrt{1 - x^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \pm x\sqrt{1 - x^2/\varepsilon^2}$$

wegen  $|x| \leq \varepsilon$ :

$$\Rightarrow |f(x, y)| \leq |x| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow 0} f(x, y) = 0 \Rightarrow f \text{ ist in } (0,0) \text{ stetig.}$$

## 3.6.2 Richtungsableitung, Gradient



**Beispiel 3.8** Spezialfall  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (Höhenlinienbild) Ableitung im Punkt  $\vec{x}_0$  in Richtung von  $\vec{a}$ . Sei  $\vec{h}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$  mit  $|\vec{a}| = 1 \Rightarrow \vec{h}'(t) = \vec{a}$  für  $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} =: \vec{h}(t)$  gilt

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{a}) = \vec{f}(\vec{h}(t)) = (\vec{f} \circ \vec{h})(t)$$

nach Satz 10 gilt:

$$(\vec{f} \circ \vec{h})'(t) = \vec{f}'(\vec{x}_0 + t\vec{a})\vec{h}'(t)$$

$$(\vec{f} \circ \vec{h})'(0) = \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{a}$$

**Definition 3.17** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$ ) und  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$   $|\vec{a}| = 1$  heißt  $\frac{\partial}{\partial \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}_0) := \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{a}$  die **Richtungsableitung** von  $\vec{f}$  in Richtung  $\vec{a}$ .

**Definition 3.18** Spezialfall  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$ )  
 Der Vektor  $\text{grad}f(\vec{x}) := f'(\vec{x})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$  heißt **Gradient** von  $f$ .

**Folgerung:** Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(\vec{x}_0) := \text{grad}f(\vec{x}_0)\vec{a} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) a_k$$

**Frage:** Für welchen Vektor  $\vec{a}$  ist die Richtungsableitung maximal ?

**Antwort:** Für  $\vec{a} = \frac{\text{grad}f(\vec{x}_0)}{|\text{grad}f(\vec{x}_0)|}$ , d.h. wenn  $\vec{a} \parallel \text{grad}f(\vec{x}_0)$ , da Skalarprodukt dann maximal.

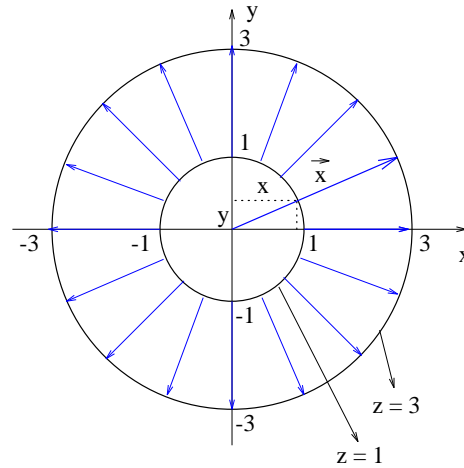
Der Gradient von  $f$  weist in die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$

**Beispiel 3.9**

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

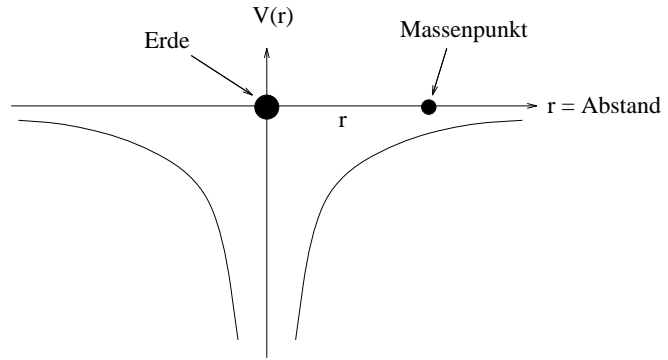
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$\Rightarrow \text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



**Beispiel 3.10**  
**Gravitationspotential, Kraft**  
 im  $\mathbb{R}^3$ :

$$V(\vec{x}) = \frac{-f}{|\vec{x}|} = \frac{-f}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$



**(Kraft)–Feld:** Feldstärke (=Kraft auf Probemasse):

$$G(\vec{x}) = -\text{grad}V(\vec{x})$$

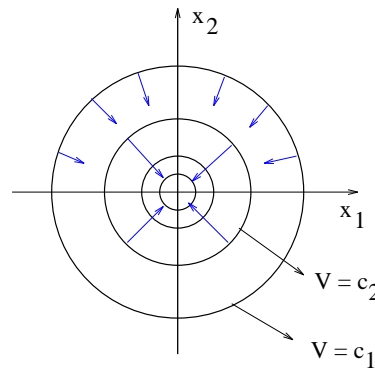
$$\frac{\partial}{\partial x_1}V(\vec{x}) = \frac{f2x_1}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{fx_1}{|\vec{x}|^3}$$

$$\Rightarrow \text{grad}V(\vec{x}) = \frac{f}{|\vec{x}|^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{f}{|\vec{x}|^3} \vec{x}$$

$$G(\vec{x}) = -\frac{f}{|\vec{x}|^3} \vec{x}$$

$$|\text{grad}V(\vec{x})| = \frac{f}{|\vec{x}|^3} |\vec{x}| = \frac{f}{|\vec{x}|^2} = \frac{f}{r^2}$$

$\Rightarrow$  Kraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab.



**3.6.3 Höhere Partielle Ableitungen**

Sei  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m (D \subset \mathbb{R}^n)$ , dann ist  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(x)$  für  $x \in \overset{\circ}{D}$  wieder eine Funktion von  $\overset{\circ}{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Damit ist  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \right) (\vec{x}) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\vec{x}) = \vec{f}_{x_i, x_k}(\vec{x})$  wohldefiniert.

**Satz 3.8**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle  $\vec{x}_0 \in D$  und alle  $i, j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)$$

**Folgerung:** Ist  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$  offen)  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar:  
Dann gilt:

$$\frac{\partial^k \vec{f}}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k \vec{f}}{\partial x_{i_{\Pi(k)}} \cdots \partial x_{i_{\Pi(1)}}}$$

für jede Permutation (Vertauschung)  $\Pi$  der Zahlen  $1, \dots, k$ .

### 3.6.4 Das totale Differential

Sei  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar. Dann stellt die Tangentialabbildung  $\vec{f}_t(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$  in der Umgebung von  $\vec{x}_0$  eine gute Näherung an die Funktion  $\vec{f}$  dar.

$$\Rightarrow \vec{f}_t(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

mit

$$d\vec{f}(\vec{x}) := \vec{f}_t(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) \approx \vec{f}'(\vec{x})(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

und

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} := \vec{x} - \vec{x}_0$$

folgt:

$$d\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}_0)d\vec{x}$$

oder

$$d\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{x}_0) dx_k = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}_0) dx_1 + \cdots + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x}_0) dx_n$$

**Definition 3.19** Die lineare Abbildung  $d\vec{f} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{x}_0) dx_k$  heißt **totales Differential** der Funktion  $\vec{f}$  im Punkt  $\vec{x}_0$ .

**Bemerkung:** Da  $\vec{f}_t$  in der Nähe von  $\vec{x}_0$  die Funktion  $\vec{f}$  gut approximiert, gilt für  $\vec{x}$  in der Nähe von  $\vec{x}_0$ :

$$d\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)$$

$d\vec{f}(\vec{x})$  gibt also (ungefähr) die Abweichung des Funktionswertes  $\vec{f}$  an, wenn  $\vec{x}$  von  $\vec{x}_0$  (wenig) abweicht.

### 3.6.5 Anwendung: Fehlerfortpflanzungsgesetz

Seien  $x_1, \dots, x_n$  Meßgrößen und  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion dieser Meßgrößen. Die Meßgenauigkeit für  $x_1, \dots, x_n$  betrage  $\pm\Delta x_1, \dots, \pm\Delta x_n$ . ( $\Delta x_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ ) Dann gilt für den Fehler  $\Delta f(\vec{x})$  von  $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) < \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \right| \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right| \Delta x_n$$

**Definition 3.20** Die Größe

$$\Delta f_{\max}(x_1, \dots, x_n) := \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \right| \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right| \Delta x_n$$

heißt der **maximale Fehler** von  $f$ . Der Quotient  $\frac{\Delta f_{\max}(\vec{x})}{f(\vec{x})}$  heißt der **relative maximale Fehler**.



**Bemerkung:**  $df_{max}$  liefert in der Regel einen zu großen Wert für den Fehler von  $f$ , denn dieser Wert tritt nur dann auf, wenn sich alle Fehler  $dx_1, \dots, dx_n$  in einer Richtung überlagern.

**Beispiel 3.11** Ein Läufer erzielt über  $s = 10km$  eine Zeit von  $t = 30min \Rightarrow$  mittlere Geschwindigkeit  $\nu = \frac{s}{t} = 20 \frac{km}{h}$ .

Der Fehler der Messung von Strecke  $s$  sei  $\Delta s = \pm 1m$ . Für die Zeit gelte  $\Delta t = \pm 1sec$ . Wie groß ist  $\Delta \nu$  maximal?

$$\begin{aligned} \Delta \nu(s, t) &= \left| \frac{\partial \nu}{\partial s}(s, t) \right| \Delta s + \left| \frac{\partial \nu}{\partial t}(s, t) \right| \Delta t \\ &= \left| \frac{1}{t} \right| \Delta s + \left| -\frac{s}{t^2} \right| \Delta t \\ &= \frac{\Delta s}{t} + \frac{s}{t^2} \Delta t \\ &= \frac{0.001 km}{0.5 h} + \frac{10 km}{0.25 h^2} \frac{1}{3600} h \\ &= \left( 0.002 + \frac{40}{3600} \right) \frac{km}{h} \\ &= (0.002 + 0.011) \frac{km}{h} = 0.013 \frac{km}{h} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\nu = (20 \pm 0.013) \frac{km}{h}}} \end{aligned}$$

**Beispiel 3.12** Bei der Herstellung von Schwimmbecken werden Fertigungsfehler gemacht. Während die Länge  $l$  und Breite  $b$  relativ genau gefertigt werden ( $\Delta l = \pm 2mm$  und  $\Delta b = \pm 1mm$ ) ist man bei der Überwachung der Tiefe  $t$  des Becken grosszügiger und toleriert noch  $\Delta t = \pm 20mm$ . Die Becken werden standardmässig in den Massen Breite  $b = 5 m$ , Länge  $l = 10 m$  und Tiefe  $t = 2 m$  ausgeliefert. Die einzufüllende Wassermenge  $V$  hängt natürlich von  $b, l$  und  $t$  ab. Wie gross ist  $\Delta V$  maximal?

$$V = b \cdot l \cdot t$$

$$\begin{aligned} \Delta V(b, l, t) &= \left| \frac{\partial V}{\partial b}(b, l, t) \right| \Delta b + \left| \frac{\partial V}{\partial l}(b, l, t) \right| \Delta l + \left| \frac{\partial V}{\partial t}(b, l, t) \right| \Delta t \\ &= |lt| \Delta b + |bt| \Delta l + |bl| \Delta t \\ &= lt\Delta b + bt\Delta l + bl\Delta t \end{aligned}$$

$$= 100dm \times 20dm \times 0.01dm + 50dm \times 20dm \times 0.02dm + 50dm \times 100dm \times 0.2 dm$$

$$= 20dm^3 + 20dm^3 + 1000dm^3 = 20l + 20l + 1000l = 1040l$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = (100 \pm 1.04)m^3}}$$

**Satz 3.9** über implizite Funktionen wird weggelassen.

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Durch  $f(x, y) = 0$  wird eine Relation beschrieben. Der Satz über impl. Funktionen macht eine Aussage darüber, ob sich  $f(x, y) = 0$  nach  $y$  auflösen läßt. (siehe [?] S. 592–599)

**Definition 3.21** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Die  $n \times n$ -Matrix

$$(\text{Hess } f)(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

heißt **Hesse-Matrix** von  $f$  im Punkt  $x \in D$ .

**Bemerkung:**  $\text{Hess } f$  ist symmetrisch, da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

### Satz 3.10

Für die Taylorformel gibt es folgende alternative Schreibweisen:

$$1. f(\vec{x} + \vec{h}) = c + \vec{a}\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}(A\vec{h}) + o\left(|\vec{h}|^2\right)$$

wobei  $c = f(\vec{x})$ ,  $\vec{a} = (\text{grad } f)(x)$ ,  $A = (\text{Hess } f)(x)$

$$\text{und } g(\vec{h}) = o\left(|\vec{h}|^2\right) \Leftrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(\vec{h})}{|\vec{h}|^2} = 0$$

## 3.7 Extremalprobleme

### 3.7.1 Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen

**Definition 3.22** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ein Punkt  $x \in D$  heißt **lokales Maximum (Minimum)** von  $f$ , falls eine Umgebung  $U \subset D$  von  $x$  existiert, so daß

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{y}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})) \quad \forall \vec{y} \in U$$

Analog ist ein **isoliertes** oder **echtes Maximum (Minimum)** definiert durch

$$f(\vec{x}) > f(\vec{y}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{x}) < f(\vec{y})) \quad \forall \vec{y} \in U, \quad \vec{y} \neq \vec{x}$$

Alle diese Punkte heißen **Extrema** oder **Extremalstellen**.

### Satz 3.11

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Besitzt  $f$  in  $\vec{x} \in D$  ein lokales Extremum, so gilt  $\text{grad } f(\vec{x}) = 0$ .

**Beweis** zurückführen auf 1-dim. Fall Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $g_i(h) := f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n)$ . Hat  $f$  in  $\vec{x}$  ein lokales Extremum, so hat  $g_i$  in 0 ein lokales Extremum, also gilt (siehe Analysis

$$I) g'_i(0) = 0. \text{ Da } g'_i(0) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \text{ folgt } \text{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = 0$$

**Bemerkung:** Satz 16 liefert eine notwendige Bedingung für lokale Extrema.

**Erinnerung an lineare Algebra:**

**Definition 3.23** Sei  $A$  eine reelle symmetrische  $n \times n$ -Matrix.

$A$  heißt **positiv (negativ) definit**, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv (negativ) sind.

$A$  heißt **positiv (negativ) semidefinit**, wenn alle Eigenwerte  $\geq 0$  (bzw.  $\leq 0$ ) sind.

$A$  heißt **indefinit**, wenn alle Eigenwerte  $\neq 0$  sind und sowohl positive als auch negative Eigenwerte existieren.

**Satz 3.12** Kriterium von Hurwitz

Sei  $A$  eine reelle symmetrische Matrix.  $A$  ist genau dann positiv definit, wenn für  $k = 1, \dots, n$  gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

$A$  ist genau dann negativ definit, wenn  $-A$  positiv definit ist.

**Satz 3.13**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $\vec{x} \in D$  mit  $\text{grad} f(\vec{x}) = 0$ . Dann gilt:

- a)  $(\text{Hess} f)(\vec{x})$  positiv definit  $\Rightarrow f$  hat in  $\vec{x}$  ein isoliertes Minimum
- b)  $(\text{Hess} f)(\vec{x})$  negativ definit  $\Rightarrow f$  hat in  $\vec{x}$  ein isoliertes Maximum
- c)  $(\text{Hess} f)(\vec{x})$  indefinit  $\Rightarrow f$  hat in  $\vec{x}$  **kein lokales Extremum**

**Bemerkung:** Satz 16 macht keine Aussage für den Fall, daß  $(\text{Hess} f)(\vec{x})$  positiv oder negativ semidefinit ist.

**Vorgehensweise zur Anwendung von Satz 15+16 zur Suche nach lokalen Extrema einer Funktion  $f : (D \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ :**

1. Berechnung von  $\text{grad} f$
2. Berechnung der Nullstellen von  $\text{grad} f$
3. Berechnung der Hessematrix  $\text{Hess} f$

4. Untersuchung von  $\text{Hess}f(\vec{x})$  für alle Nullstellen  $\vec{x}$  von  $\text{grad}f$ .

**Beispiel 3.13 für Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :**

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + c$

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Hess}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit auf ganz  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$  hat in 0 ein isoliertes lokales Minimum. (nach oben geöffnetes Paraboloid)

2.  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c$

$$\text{grad}f(0, 0) = 0 \quad \text{Hess}f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  isoliertes lokales Maximum in 0. ( $f$  ist ein nach unten geöffnetes Paraboloid)

3.  $f(x, y) = ax + by + c \quad a, b \neq 0$

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$  kein lokales Extremum

4.  $f(x, y) = x^2 - y^2 + c$

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad}f(0, 0) = 0$$

$$\text{Hess}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$   $\text{Hess}f$  indefinit  $\Rightarrow f$  hat kein lokales Extremum.

5.  $f(x, y) = x^2 + y^4$

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad}f(0, 0) = 0$$

$$\text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$   $\text{Hess}f$  positiv semidefinit, aber  $f$  hat in 0 ein isoliertes Minimum.

6.  $f(x, y) = x^2$

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad}f(0, 0) = 0$$

$$\text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$   $\text{Hess}f$  pos. semidefinit, aber  $f$  hat ein lokales Minimum (nicht isoliert!). Alle Punkte auf der  $y$ -Achse ( $x = 0$ ) sind lokale Minima.

$$7. f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad}f(0, 0) = 0$$

$$\text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Hess  $f$  pos. semidefinit, aber  $f$  hat kein lokales Extremum.

**Satz 3.14** (lokale Extrema im  $\mathbb{R}^2$ )

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $\vec{x} \in D$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

und

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

im Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\vec{x}$  ein

- isoliertes Maximum, wenn  $f_{xx}(x, y) < 0$  ist
- isoliertes Minimum, wenn  $f_{xx}(x, y) > 0$  ist

**Beweis von Satz 3.14:**

1. isoliertes Minimum:

Sei  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  im Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $f_{xx}(x, y) > 0$ . Dann gilt  $\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} > 0$  und  $\det(f_{xx}) > 0$  nach Satz 3.12 ist dann Hess  $f$  positiv definit, und nach Satz 3.13 hat  $f$  ein isoliertes lokales Minimum.

2. isoliertes Maximum:

Sei  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  im Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $f_{xx}(x, y) < 0$ , dann gilt,

$$\det \left[ - \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} -f_{xx} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & -f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

$$\det [-(f_{xx})] = -f_{xx}(x, y) > 0$$

$\Rightarrow$  beide Unterdeterminanten von  $-\text{Hess}f(x, y)$  sind positiv, damit ist  $-\text{Hess}f(x, y)$  positiv definit

$\Rightarrow$  Hess  $f(x, y)$  ist negativ definit

$\Rightarrow$   $f$  hat in  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein isoliertes lokales Maximum

**Beispiel 3.14** Extrema von  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7$

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x + y - 2 \\ x + 2y + 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$2x + y - 2 = 0$$

$$x + 2y + 3 = 0 \quad |(-2)$$

$$-3y - 8 = 0$$

$$y = -\frac{8}{3}$$

$$x = \frac{16}{3} - 3 = \frac{7}{3}$$

Hess $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist positiv definit, weil beide Unterdeterminanten positiv sind, bzw. , weil  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 - 1 = 3 > 0$  und  $f_{xx} = 2 > 0$ .

Damit hat  $f$  im Punkt  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$  ein isoliertes lokales Minimum.

### 3.7.2 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

**Beispiel 3.15** gesucht ist das Rechteck maximaler Fläche bei festem Umfang  $U$ .

**Fläche**  $f(x, y) = xy$ . Die Funktion  $f(x, y)$  besitzt kein lokales Maximum!

**Nebenbedingung:**  $U = 2(x + y)$  oder  $x + y = \frac{U}{2}$  eingesetzt in  $f(x, y) = xy$

$$\Rightarrow g(x) := f\left(x, \frac{U}{2} - x\right) = x\left(\frac{U}{2} - x\right) = \frac{U}{2}x - x^2$$

$$g'(x) = \frac{U}{2} - 2x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{U}{4} \\ y = \frac{U}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{x = y}}$$

$$g''\left(\frac{U}{4}\right) = -2$$

$\Rightarrow x = y$  ist Maximum der Fläche bei konstantem Umfang!

**In vielen Fällen ist das Einsetzen der Nebenbedingung(en) nicht möglich !**

**gesucht:** Extremum einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter den  $p$  Nebenbedingungen

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$h_p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

**Satz 3.15**

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  seien stetig differenzierbare Abbildungen auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n, n > p$ , wobei die Matrix  $\vec{h}'(\vec{x})$  für jedes  $\vec{x} \in D$  den Rang  $p$  hat. Dann gilt:

Ist  $\vec{x}_0 \in D$  ein **Extremum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $\vec{h}(\vec{x}_0) = 0$** , so existieren reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

und

$$h_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, p$$

**Veraanschaulichung:**

Sei  $p = 1$ , d.h. nur eine Nebenbedingung gegeben. Dann gilt für eine Extremalstelle  $\vec{x}_0$  von  $f$  unter der Bedingung  $h(\vec{x}_0) = 0$ :

$$\text{grad}f(\vec{x}_0) + \lambda \text{grad}h(\vec{x}_0) = 0$$

$\Rightarrow$   $\text{grad}f$  und  $\text{grad}h$  sind im Extremum  $\vec{x}_0$  parallel!

$\Rightarrow$  Höhenlinien von  $f$  und von  $h$  für  $h(\vec{x}) = 0$  sind in  $\vec{x}_0$  parallel.

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  heißen Lagrangesche Multiplikatoren.

**Bemerkung:** Es sind  $n + p$  Gleichungen mit  $n + p$  Unbekannten zu lösen. Unter den Lösungen sind dann die Extrema noch zu bestimmen, d.h.: Nicht jede Lösung der  $n + p$ -Gleichungen muß ein Extremum von  $f$  unter der Bedingung  $\vec{h} = 0$  sein! (notwendige Bedingung für Extremum)

**Definition 3.24** Seien  $f, h$  wie in Satz 18 gegeben. Die Funktion  $L : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^p \lambda_k h_k(x_1, \dots, x_n)$$

heißt **Lagrangefunktion**.

**Folgerung:** Die in Satz 18 zu lösenden Gleichungen lassen sich einfacher darstellen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$h_k(\vec{x}) = 0 \quad (k = 1, \dots, p)$$

**Beispiel 3.16 gesucht:** Extrema von  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$  unter der Nebenbedingung  $h(x, y) = x^2 + y - 2 = 0$

$$\begin{aligned} L(x, y) &= x^2 + y^2 + 3 + \lambda(x^2 + y - 2) \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) &= 2x + 2\lambda x \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) &= 2y + \lambda \end{aligned}$$

$$\text{grad}L(x, y) = 0 \quad , \quad h(x, y) = 0$$

$$2x + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$2y + \lambda = 0 \tag{2}$$

$$x^2 + y - 2 = 0 \tag{3}$$

$$(2)\text{in}(1) : 2x - 4xy = 0 \tag{4}$$

$$y = 2 - x^2 \quad (3a) \tag{5}$$

$$(3a)\text{in}(4) : 2x - 4x(2 - x^2) = 0 \tag{6}$$

1. Lösung:  $x_1 = 0$     $y_1 = 2$

$$2 - 8 + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = 6$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad y_{2,3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist Maximum,

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sind Minima.

**Beispiel 3.17** Man bestimme Extrema der Funktion  $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$  auf der Kreisscheibe  $\overline{K}_{\vec{0},1} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**1. lokale Extrema im Inneren von  $\overline{K}_{\vec{0},1}$ :**

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist Nullstelle des Gradienten.

$$\text{Hess}f = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|8| = 8$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$$

$\Rightarrow$  Hess  $f$  nicht positiv definit und Hess  $f$  nicht negativ definit. Eigenwerte von Hess  $f =: A$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda)\vec{x} = 0$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} \vec{x} = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow (8-\lambda)(-\lambda) - 9 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16+9} \\ \lambda_1 &= 9 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$  Hess  $f$  ist indefiniert  
 $\Rightarrow$   $f$  hat kein lokales Extremum auf einer offenen Menge  $D$ .  
 $\Rightarrow$  insbesondere hat  $f$  auf  $K_{\vec{0},1}$  kein Extremum!

**2. Lokale Extrema auf dem Rand, d.h. auf  $\partial\bar{K}_{0,1}$  gesucht:** lokale Extrema von  $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  Lagrangefunktion  $L = 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 8x - 3y + 2\lambda x = (2\lambda + 8)x - 3y \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -3x + 2\lambda y \end{aligned}$$

Gleichungssysteme für  $x, y, \lambda$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad 8x - 3y + 2\lambda x &= 0 \\ (2) \quad -3x + 2\lambda y &= 0 \\ (3) \quad x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ (1)y - (2)x = (4) \quad 8xy - 3y^2 + 3x^2 &= 0 \end{aligned}$$

**1. Lösung:** (3)  $\Rightarrow$  (3a) :  $y^2 = 1 - x^2$

$$(3a) \text{ in } (4) : \pm 8x\sqrt{1-x^2} - 3(1-x^2) + 3x^2 = 0$$

$$\text{Subst. : } x^2 = u : \pm 8\sqrt{u}\sqrt{1-u} = 3(1-u) - 3u = 3 - 6u$$

quadrieren:

$$\begin{aligned} 64u(1-u) &= 9 - 36u + 36u^2 \\ -64u^2 + 64u - 36u^2 + 36u - 9 &= 0 \\ -100u^2 + 100u - 9 &= 0 \\ u^2 - u + \frac{9}{100} &= 0 \\ u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{9}{100}} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25-9}{100}} = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{10} \\ u_1 &= 0.1 \\ u_2 &= 0.9 \\ x_{1,2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \pm 0.3162 \\ x_{3,4} &= \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \approx \pm 0.9487 \end{aligned}$$

Höhenlinien:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x^2 - 3xy = c \\ y &= \frac{-c + 4x^2}{3x} = \frac{4}{3}x - \frac{c}{3x} \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow y_3 = \pm \sqrt{1 - x_3^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 4\frac{9}{10} - 3\frac{3}{10} = \frac{27}{10}$$

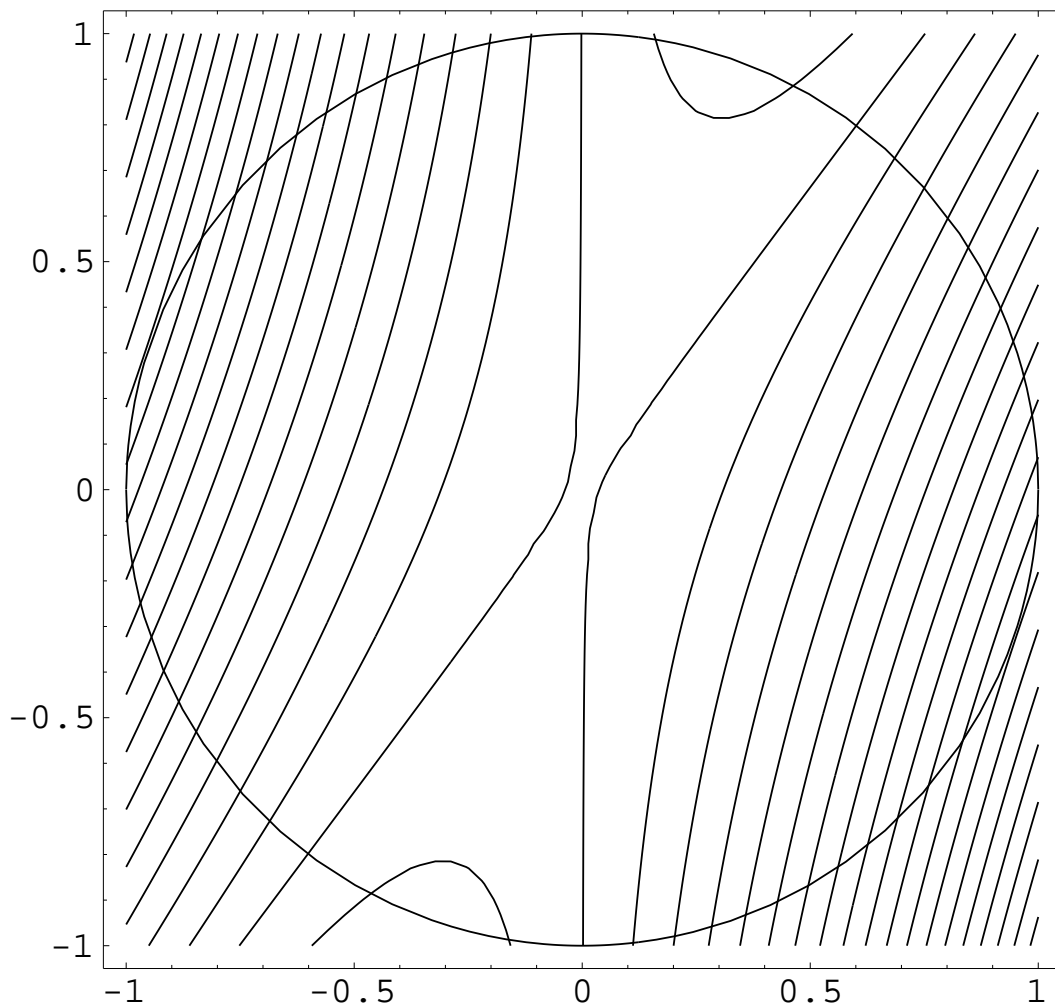
$$f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 4\frac{9}{10} + 3\frac{3}{10} = \frac{45}{10}$$

$\Rightarrow f(x, y)$  hat auf  $\bar{K}_{0,1}$  in  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$  und in  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$  je ein isoliertes lokales Maximum

$\Rightarrow f(x, y)$  hat auf  $\bar{K}_{0,1}$  in  $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$  und in  $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$  je ein isoliertes lokales Minimum.

**Mathematica Grafik:**

```
Show[ContourPlot[4*x^2 - 3 *x*y, {x,-1,1}, {y,-1,1}, PlotPoints -> 60,  
    Contours -> 20, ContourSmoothing -> True, ContourShading -> False,  
    PlotLabel -> " "],  
Plot[{Sqrt[1-x^2],-Sqrt[1-x^2]}, {x,-1,1}],  
AspectRatio -> 1  
]
```



### 3.8 Die Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

für Funktionen von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Satz 3.16

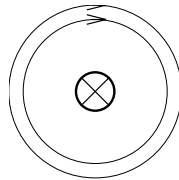
Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $D \subset \mathbb{R}^n$ )  $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar und seien  $\vec{x} \in D, \vec{h} \in D$ , so daß  $\vec{x} + t\vec{h} \in D \quad \forall t \in [0, 1]$ . Dann gibt es ein  $\Theta \in [0, 1]$ , so daß

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_l} \frac{\partial^l f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}} + R_k(\vec{x}, \vec{h})$$

mit

$$R_k(\vec{x}, \vec{h}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1} f(\vec{x} + \Theta\vec{h})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}$$

Entwicklung um  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$



**Beweisidee:** Zurückführen auf den eindim. Fall:

Definiere

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) := f(\vec{x} + t\vec{h})$$

Berechne Taylorentwicklung von  $g$  in Punkt 0:

$$\exists z \in [0, 1] : g(t) = \sum_{l=0}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} t^l + \frac{g^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} t^{k+1}$$

zu zeigen ist nun:

$$g^{(l)}(0) = \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}$$

durch Anwendung der Kettenregel auf  $g(t) = f(\vec{x} + t\vec{h})$

#### Beispiel 3.18

1.  $k = 1$ . Wenn  $f$  2-mal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\vec{x} + \Theta\vec{h})$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} dx_n + R_n(\vec{x}_0, d\vec{x})$$

mit  $\vec{x} = \vec{x}_0 + d\vec{x}$  und  $df(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$  folgt  $df(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} dx_n + R_n(\vec{x}_0, d\vec{x}) = \text{totales Differential}$ .

2. Relativistische Addition von Geschwindigkeiten  $\nu_1$  und  $\nu_2$  zu  $w(\nu_1, \nu_2)$

$$w(\nu_1, \nu_2) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{1 + \frac{\nu_1 \nu_2}{c^2}}$$

Entwicklung von  $w$  im Punkt  $(0,0)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_1} = \frac{1 \left(1 + \frac{\nu_1 \nu_2}{c^2}\right) - (\nu_1 + \nu_2) \left(\frac{\nu_2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\nu_1 \nu_2}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_1}(0,0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \nu_2}(0,0) = 1$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{w(\nu_1, \nu_2)}} &= w(0,0) + \frac{\partial w}{\partial \nu_1}(0,0)\nu_1 + \frac{\partial w}{\partial \nu_2}(0,0)\nu_2 + R_2(0, (\nu_1, \nu_2)) \\ &= 0 + \nu_1 + \nu_2 + R_2 \approx \underline{\underline{\nu_1 + \nu_2}} \end{aligned}$$

klassischer Grenzfall für  $\nu_1, \nu_2 \ll c$ !

## 4 Anwendungen der Differentialrechnung

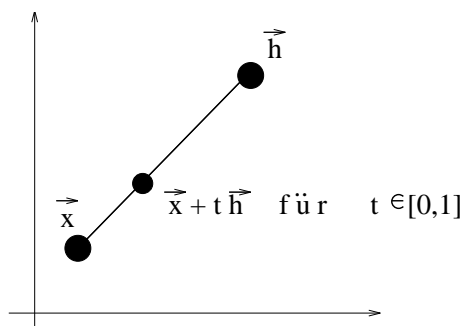
### 4.1 Ausgleichsrechnung

#### Aufgabe 1

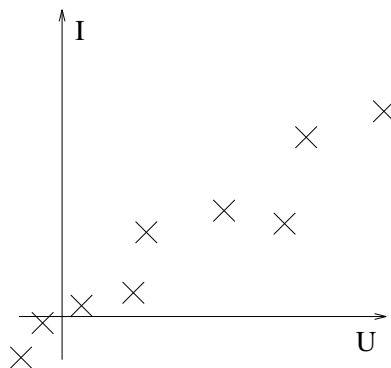
Messen der Kennlinie eines unbekanntes elektronischen Bauteils. Kennlinie:  $I = f(U)$

**Beispiel 4.1** gegeben: Wertetabelle:

$$\begin{aligned} &(U_1, I_1) \\ &(U_2, I_2) \\ &\vdots \\ &(U_n, I_n) \end{aligned}$$



- Welche Funktion  $f(U)$  liegt den Daten zugrunde ?
- Wie geht man vor zur Bestimmung von  $f$  ?



$\Rightarrow$  für jede endliche Serie von Messungen gibt es unendlich viele differenzierbare (glatte) Funktionen, d.h.:  $\forall i = 1, \dots, n \quad I_i = f(U_i)$ .

$\Rightarrow$  zu viele Freiheitsgrade für  $f$

$\Rightarrow$  Aufgabe (noch) nicht eindeutig gestellt!

#### Aufgabe 2

Gesucht ist die Gerade  $I = \frac{1}{R}U$ , welche möglichst wenig von den Messungen abweicht.

**Wie geht das ?**  $\rightarrow$  Zeichnerisch

**Rechnen ?**  $\rightarrow$  Gruppenarbeit  $\Rightarrow$  Minimierungsaufgabe ! Welche Größe soll minimiert werden ?

- Abstand zu 2 Punkten ?
- maximaler Abstand ?
- Summe der Abstände ?
- Summe der Beträge der Abstände ?
- summe der Quadrate der Abstände ?

## 4.2 Die Methode der kleinsten Quadrate (Gauß)

Minimierungsaufgabe nach Gauß:

geg.:  $n$  Messungen, d.h. Wertepaare

$$\begin{array}{c} (x_1, y_1) \\ \vdots \\ (x_n, y_n) \end{array}$$

Funktion  $f(x, a_1, \dots, a_k) := f(x)$   $k < n$

gesucht: Werte für  $a_1, \dots, a_k$  derart, daß

$$E(f(x_1) - y_1, \dots, f(x_n) - y_n) := \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird !

**Vereinfachung:**  $f(x, a_1, \dots, a_k) := a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$   $f$  ist Linearkombination von Funktionen. E extremal  $\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

$$E(\dots) = \sum_{i=1}^n (a_1 f_1(x_i) + \dots + a_k f_k(x_i) - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l=1}^k a_l f_l(x_i) - y_i \right) f_j(x_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^k a_l f_l(x_i) f_j(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i f_j(x_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^k a_l \underbrace{\sum_{i=1}^n f_l(x_i) f_j(x_i)}_{A_{ji}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i f_j(x_i)}_{b_j}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^k A_{jl} a_l = b_j \quad j = 1, \dots, k$$

lineares Gleichungssystem für Parameter  $a_1, \dots, a_k$  (**Normalgleichungen !**) Lösen der Normalgleichungen liefert  $a_1, \dots, a_k$ .

**Bemerkung:** Normalgleichungen sind in der Regel (nicht immer) eindeutig lösbar.

**Spezialfall:**  $f(x, a, b) = ax + b$  (Regressionsgerade)

$$E = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

**Lösung:**

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

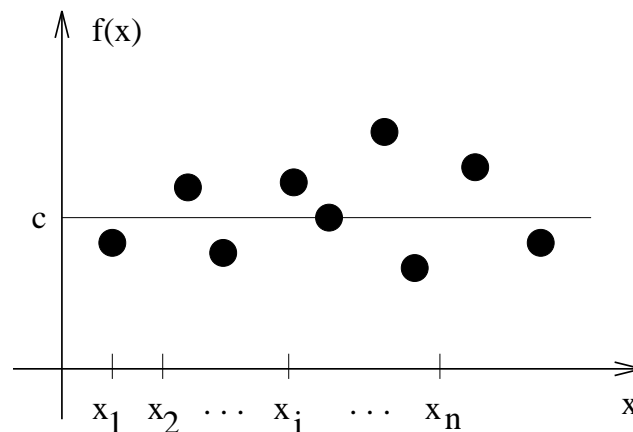
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

**bleibt zu zeigen:** Die Lösung  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  von  $\text{grad}E = 0$  ist ein Minimum !

### 4.3 Statistische Rechtfertigung ( → Statistik)

Sei  $f(x) = c$  die konstante Funktion.

**gesucht:**  $c$  !



$$E = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (c - y_i)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (c - y_i) = 2 \left( \sum_{i=1}^n c - \sum_{i=1}^n y_i \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \left( nc - \sum_{i=1}^n y_i \right) = 0 \\
 &\Rightarrow nc = \sum_{i=1}^n y_i \\
 &\Rightarrow c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i
 \end{aligned}$$

Arithmetisches Mittel !

### 4.3.1 Fehler der Koeffizienten $a_i$

Wegen Meßfehler in  $(x_i, y_i)$  sind  $a_1, \dots, a_k$  fehlerhaft.

Berechnung der Genauigkeit  $\Delta a_1, \dots, \Delta a_k$  aus  $\Delta y_1, \dots, \Delta y_n$  mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (maximaler Fehler)

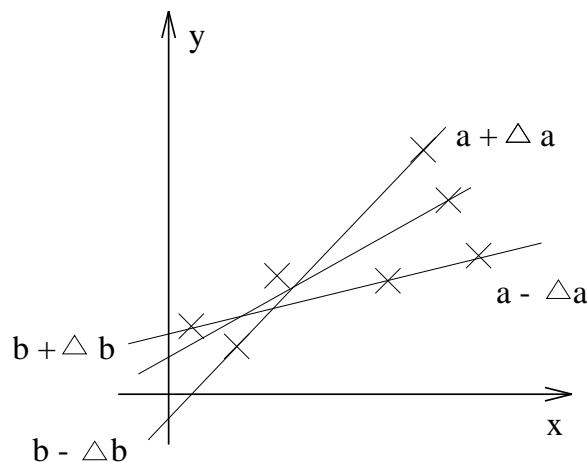
$$\Delta a_i = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \right| \Delta y_j$$

**Spezialfall Regressionsgerade:**

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial a}{\partial y_j} &= \frac{1}{N} (nx_j - \sum_{i=1}^n x_i) \\
 \frac{\partial b}{\partial y_j} &= \frac{1}{N} (\sum x_i^2 - (\sum x_i) x_j)
 \end{aligned} \right| N = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$\Delta a = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a}{\partial y_j} \right| \Delta y_j$$

$$\Delta b = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial b}{\partial y_j} \right| \Delta y_j$$



**Beispiel 4.2** (Brauch S. 492) siehe Übungen.

**nichtlineare Regression (Beispiele):**

**Potenzfunktion:**  $v = cu^d$  konst.  $c, d$  gesucht !

$$\log v = \log c + d \log u$$

$$y := \log v, \quad x := \log u \quad \Rightarrow \quad a_1 = \log c, \quad a_2 = d$$

$$y = a_1 + a_2 x$$

**Exponentialfunktion:**  $v = Ae^{bu}$   $A, b$  gesucht

$$\log v = \log A + bu$$

$$y := \log v, \quad x := u \quad \Rightarrow \quad a_1 = \log A, \quad a_2 = b$$

$$y = a_1 + a_2 x$$

## 5 Differenzgleichungen

### 5.1 Modelle

Differentialgleichungen und ihre diskrete Schwestern die Differenzgleichungen resultieren in erster Linie aus der mathematischen Modellbildung von physikalischen, chemischen, biologischen, ökonomischen, ... Prozessen. Diese Gleichungen beschreiben in diesem Zusammenhang ein vereinfachtes Modell der Wirklichkeit. Wozu werden diese Modelle erstellt?

Für Erstellung dieser Modelle und die Berechnung der resultierenden Gleichungen gibt es viele Gründe. Einer der Hauptantriebsfeder für die Beschäftigung mit dieser Materie dürfte jedoch der Wunsch sein die Zukunft vorhersagen zu können. In den vielen Fällen wo die mathematischen Modelle mit der Realität gut genug übereinstimmen klappt dies inzwischen recht gut. Schwierigkeiten macht allerdings oft die langfristige Vorhersage; woran dies liegt werden wir später sehen. Beispielsweise klappt die kurzfristige Wettervorhersage heute schon ganz gut wohingegen die langfristigen Prognosen eher an Raten erinnert

Bevor wir uns ersten Beispielen von Differenzgleichungen zuwenden noch ein kurzes Zitat:

*Ich behaupte sogar, dass in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.*

Immanuel Kant

”Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft”

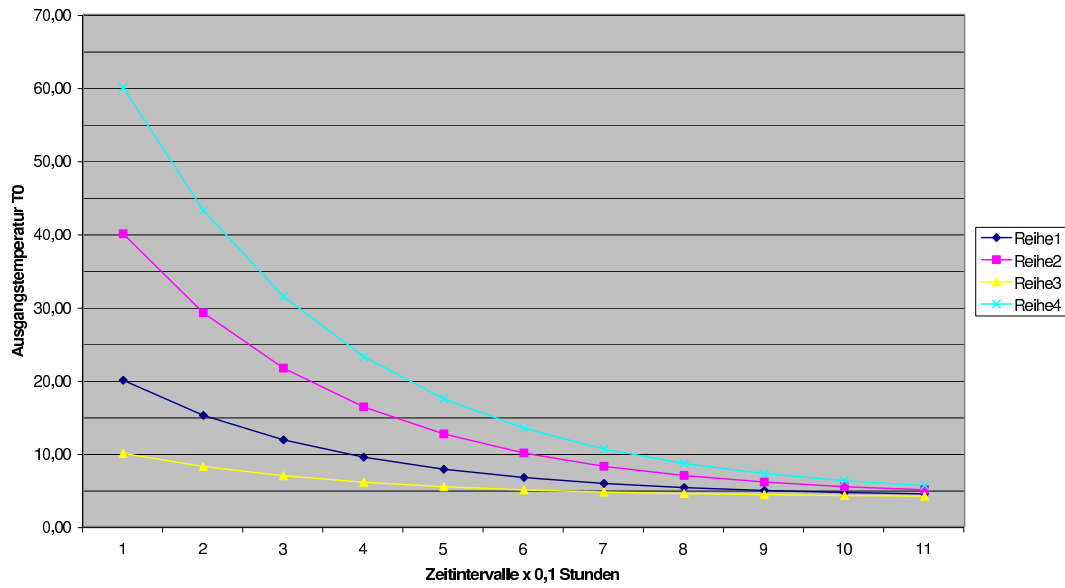
Doch weg von der Metaphysik hin zu einem ganz banalen Beispiel:

Wie lange muss ich eine Cola-Dose von 20°C in einen Kühlschrank von 4°C stellen um eine ”angenehme” Trinktemperatur von 6°C zu erhalten? Dauert dieser Vorgang bei Cola-Dosen von 40°C doppelt so lange? usw.... Im folgenden wurde dieses Modell der Temperaturänderung in ein EXCEL-Sheet eingegeben und dann ein entsprechendes Diagramm ausgegeben.

---

Dies ist ein Beispiel f"ur die Berechnung der Temperaturentwicklung einer Cola Dose im K"uhlschrank bei unterschiedlichen Anfangstemperaturen

Temperaturentwicklung von Coladosen im Kühlschrank



Dies ist die graphische Ausgabe für die Temperaturentwicklung einer Cola Dose im Kühlschrank bei den Anfangstemperaturen  $10^{\circ}\text{C}$ ,  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $40^{\circ}\text{C}$  und  $60^{\circ}\text{C}$

## 5.2 Definition der Differenzgleichung

Was ist nun eine Differenzgleichung?

In vielen Fällen ist eine Kenngröße nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten  $t_1, t_2, t_3, \dots$  bekannt. Die Kenngröße  $y$  kann durch eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$  beschrieben werden:

$$\text{Schreibweise : } y_t \quad \text{statt} \quad y(t)$$

Mit der Annahme, dass  $t$  nur ganzzahlige Werte annimmt (d.h.  $\Delta t = 1$ ) kommen wir zur

folgenden Definition

|| **Definition 5.1**  $\Delta y_t := y_{t+1} - y_t$

Beachten Sie, dass die Differenz davon abhängt zwischen welchen Zeitpunkten die Differenz gebildet wird.

Aus einer Folge von Differenzen (zu verschiedenen Zeitpunkten) lässt sich nun wiederum eine neue Folge von Differenzen (von Differenzen) bilden. Differenzen der Ordnung  $k$  werden daher gebildet durch:

$$\Delta^k y_t = \Delta(\Delta^{k-1} y_t) = \Delta^{k-1} y_{t+1} - \Delta^{k-1} y_t$$

Beispiel  $k=2$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t \\ &= (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) \\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \end{aligned}$$

|| **Definition 5.2** *Eine Differenzgleichung ist eine Gleichung, die eine Differenz enthält. Sie heisst von  $k$ -ter Ordnung wenn die höchste Ordnung der vorkommenden Differenzen gleich  $k$  ist.*

Beispiel

$\Delta y_t = 3$	Differenzgleichung erster Ordnung
$\Delta y_t = \frac{1}{2} y_t$	Differenzgleichung erster Ordnung
$\Delta^2 y_t + 2\Delta y_t = -3$	Differenzgleichung zweiter Ordnung

usw.

## 6 Differentialgleichungen

Verfeinert man bei den Differenzgleichungen die Schrittweite immer mehr, so erhält man im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  aus den Differenzgleichungen die Differentialgleichungen

**Definition 6.1** *Begriffserklärung: Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannt-ten Funktion  $y(x)$  bis zur  $n$ -ten Ordnung auftreten heisst gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Gesucht ist nicht eine Zahl oder ein Vektor, sondern eine Funktion.*

**Definition 6.2** *Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ( $n$  fest) und eine vorgegebene, bezüglich des letzten Arguments nicht konstante Funktion.*

*Unter einer gewöhnlichen DGL der Ordnung  $n$  versteht man eine Gleichung der Form*

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad *$$

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall:

Eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y(x)$  heisst Lösung der DGL in  $I$

wenn  $y(x)$  in  $I$   $n$ -mal differenzierbar ist und  
wenn für alle  $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$  für alle  $x \in I$  und  
wenn die Gleichung \* für alle  $x \in I$  erfüllt ist.

Zunächst beschränken wir uns aber auf die Untersuchung von DGLn 1-ter Ordnung

## 6.1 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

### 6.1.1 Geometrische Interpretation

Wir betrachten die DGL 1-ter Ordnung

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad *$$

und nehmen an, dass sich diese nach  $y'(x)$  auflösen lässt:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ oder auch } y' = f(x, y)$$

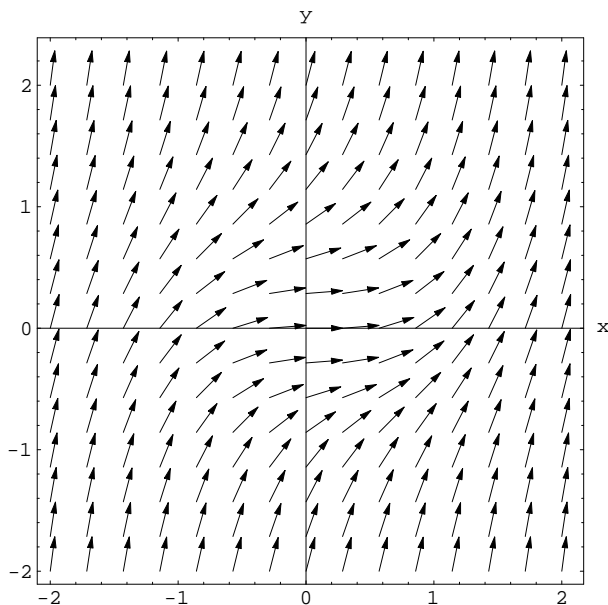
Durch die Beziehung  $y' = f(x,y)$  wird jedem Punktepaar  $(x,y)$  in einem gewissen Bereich  $D$  z.B. im Rechteck

$$\{ (x,y) \mid a < x < b, \quad c < y < d \}$$

eine Richtung zugeordnete:

Durch  $(x,y)$  tragen wir eine kurze Strecke mit der Steigung  $y' (=f(x,y))$ , ein sogenanntes Linienelement ab

Beispiel:  $y' = x^2 + y^2 := f(x, y)$



```
DirectionField =
PlotVectorField[ {1, x^2 + y^2 }, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  ScaleFunction -> (1 &), AspectRatio -> 1,
  Axes -> True, AxesLabel -> {"x", "y"},
  Ticks -> None, Frame -> True];
Display["dgl_x^2+y^2.eps", %,"EPS"]
```

Im Punkt  $(2,1)$  besitzt das Linienelement die Steigung  $f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$

Die Menge aller Linienelemente nennt man das Richtungsfeld.



Den Lösungen von  $y'=f(x,y)$  entsprechen jetzt Kurven, die in das Richtungsfeld "passen", die also in jedem Punkt gerade die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung haben.

Folgerung:

Die allgemeine Lösung einer DGL besteht nicht aus einer einzigen Lösung sondern aus einer Schar von Lösungen.

### 6.1.2 Anfangswertproblem

Eine DGL hat daher im allgemeinen unendlich viele Lösungen; siehe Beispiel 1 (Temperaturkühlung):

$$TEMPderCOLA'(t) = -k * TEMPderCOLA(t)$$

Für alle  $Anf \in \mathbb{R}$  ist

$$TEMPderCOLA_{Anf}(t) = Anf * e^{-kt}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Probe:  $TEMPderCOLA'_{Anf}(t) = \dots\dots\dots$

DirectionField =

```
PlotVectorField[ {1, -0.1*y+0.4 }, {x, 0, 50}, {y, -5, 30},
                  ScaleFunction -> (1 &), AspectRatio -> 1,
                  Axes -> True, AxesLabel -> {"x", "y"},
```

```
Ticks -> None, Frame -> True];
```

```
Display["dgl_-0.1y+0.4.eps", %, "EPS"]
```

Für die Bestimmung von  $Anf$  bei einem konkreten Problem braucht man aber zusätzliche Informationen. Im allgemeinen Fall einer DGL n-ter Ordnung werden für einen x-Wert  $x_0$  n Werte angegeben:

der Funktionswert  $y(x_0)$  und die Werte der ersten n-1 Ableitungen

$$y(x_0), \quad y'(x_0), \quad \dots, \quad y^{(n)}(x_0)$$

In unserem Fall ist die Ordnung=1, d.h. es ist vorgegeben

..... Da die Funktion  $TEMPderCOLA(t)$  für beliebige Werte von  $Anf$  eine (allgemeine) Lösung der DGL ist, kann der Koeffizient  $Anf$  nur aus dem Anfangswert bestimmt werden, um so zu einer speziellen (partikulären) Lösung der DGL zu kommen:

$$TEMPderCOLA_{Anf}(t_0) = Anf * e^{-k*t_0} = TEMP_0 \text{ für } t_0 = 0$$

dass heisst  $Anf = TEMP_0$  für  $t_0 = 0$  und die partikuläre Lösung lautet:

$$TEMPderCOLA_{Anf}(t) = TEMP_0 * e^{-k(t-t_0)} = TEMP_0 * e^{-kt} \text{ für } t_0 = 0$$

Bemerkung: Das oben behandelte Problem besteht also aus einer DGL 1-ter Ordnung und aus einer Anfangsbedingung

### 6.1.3 Grundproblem bei Anfangswertaufgaben

Es stellt sich nun die Frage ob für die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

bei vorgegebenen Anfangsdaten  $(x_0, y_0)$  und vorgegebener Funktion  $f$ , stets eine Lösung zu finden ist (*Existenzproblem*) und ob diese Lösung die einzige ist (*Eindeutigkeitsproblem*)

Beispiel: Gegeben sei die DGL

$$y' = f(x, y) = 1 + y^2$$

Durch Raten und Nachrechnen sieht man, dass die folgende Funktion die DGL löst:

$$y(x) = \tan(x + C)$$

mit einer beliebigen Konstante  $C$

Eine spezielle Lösung durch den Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  (d.h. Anfangsbedingung  $y(0)=0$ ) erhalten wir aus

$$y(0)=0 \tan(C), \text{ oder } C=k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

durch

$$y(x) = \tan x, \quad C=0$$

Es existiert also die Lösung von  $y' = 1 + y^2$  durch den Punkt  $(0,0)$  nur im Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Diese Beispiel zeigt, dass Existenzaussagen im Allgemeinen nur lokal, d.h. in einer genügend kleinen Umgebung des Anfangswertes  $x_0$  gelten

Beispiel: Betrachte die DGL

$$y' = f(x,y) = \sqrt{|y|}$$

Die triviale Lösung ist sofort erkennbar:

$$y(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Weitere Lösungen sind für beliebige Konstanten  $C$

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 & \text{falls } y > 0 \\ -\left(\frac{x+c}{2}\right)^2 & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Für keinen Punkt der  $x$ -Achse liegt somit eine eindeutige Lösung vor.

Diese Beispiele zeigen, dass nicht jedes Anfangswertproblem eine Lösung bzw. eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Fragestellung ist aber sehr wichtig, insbesondere bei numerischen Lösungsverfahren, die mindestens die Existenz einer Lösung voraussetzen. Es stellt sich daher die Frage für welche Klassen von Anfangswertproblemen es genau eine Lösung gibt. Die Antwort liefert der folgende Satz von Picard-Lindelöf:

## 6.2 Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

### Satz 6.1

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei im Rechteck

$$D := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ fest}\}$$

stetig und dort nach  $y$  stetig partiell differenzierbar. Ferner sein  $M$  und  $h$  durch

$$M := \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| \text{ und } h := \min(a, \frac{b}{M})$$

erklärt. Dann gibt es in der Umgebung

$$U_h(x_0) := \{x \mid |x - x_0| < h\}$$

des Punktes  $x_0$  genau eine Lösung  $y(x)$  des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

### 6.2.1 Beweis der Existenz einer Lösung

Das Anfangswertproblem ist äquivalent zu folgender Integralgleichung:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Denn durch Einsetzen der DGL in das Integral gewinnt man:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

und andererseits durch Differenzieren der Integralgleichung:

$$y'(x) = 0 + \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = f(x, y(x))$$

und

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = y_0$$

Das heisst eine Lösung der Integralgleichung ist zugleich eine Lösung der DGL und umgekehrt. Konstruktion einer Lösung mittels sukzessiver Approximation: Starte mit der Anfangsnäherung

$$y_0(x) := y_0 \quad \forall x \in U_h(x_0)$$

als konstante Funktion durch  $(x_0, y_0)$ . Mit Hilfe der Näherungslösung bestimmen wir unter Verwendung der Integralgleichung eine weitere Näherung:

$$y_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \quad \forall x \in U_h(x_0)$$

und wenden diese Methode erneut an und erhalten

$$y_2(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \quad \forall x \in U_h(x_0)$$

beziehungsweise nach n-maliger Wiederholung

$$y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad \forall x \in U_h(x_0), n \in \mathbb{N}$$

Somit erhalten wir eine Folge von Näherungslösungen:  $\{y_n(x)\}$ .

Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion, dass die so gewonnene Folge  $\{y_n(x)\}$  nicht aus dem Definitionsbereich hinausführt, da sonst die Ausdrücke

$$\int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

nicht erklärt sind.

Induktionsanfang (n=0):

$$\text{Wegen } y_0(x) = y_0 \text{ folgt } |y_0(x) - y_0| = 0 \leq b \quad \forall x \in U_h(x_0)$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Für ein (festes) } n \in \mathbb{N} \text{ gelte auf } U_h(x_0) \quad |y_n(x) - y_0| \leq b$$

Induktionsschluss: Zu zeigen  $|y_{n+1}(x) - y_0| \leq b$

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_0| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt - y_0 \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M |x - x_0| \\ &< Mh < M \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von  $f$  durch  $M$  im Rechteck  $D$  und der Definition von  $h$

Also ist die Folge  $\{y_n(x)\}$  wohldefiniert.

Behauptung: Die Folge  $\{y_n(x)\}$  konvergiert auf  $U_h(x_0)$  gegen eine Lösung der DGL bzw. gegen eine Lösung der Integralgleichung:

Dazu verwenden wir für  $y_n(x)$  die Darstellung

$$y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) = y_0 + \sum_{j=1}^n (y_j(x) - y_{j-1}(x))$$

da sich die Summanden auf der rechten Seite besonders günstig abschätzen lassen: Es gilt nämlich für  $x \in U_h(x_0)$  :

$$\begin{aligned} |y_j(x) - y_{j-1}(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{j-1}(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_{j-2}(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))| dt \right| \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von  $f$  gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für den Integranden des letzten Integrals eine Konstante  $L > 0$  mit

$$|f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))| \leq L |y_{j-1}(t) - y_{j-2}(t)|$$

wobei

$$L = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} \right|$$

Also gilt für alle  $x \in U_h(x_0)$

$$|y_j(x) - y_{j-1}(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_{j-1}(t) - y_{j-2}(t)| dt \right|$$

Andererseits gilt nach Definition von  $M$  für alle  $x \in U_h(x_0)$

$$|y_1(x) - y_0| = \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt - y_0 \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M |x - x_0|$$

Damit lässt sich die Abschätzung der Summanden  $|y_j(x) - y_{j-1}(x)|$  "iterieren"

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \leq LM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = LM \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq LM \frac{h^2}{2}$$

u.s.w. Durch vollständige Induktion lässt sich daher zeigen:

$$|y_j(x) - y_{j-1}(x)| \leq ML^{j-1} \frac{h^j}{j!} = \frac{M}{L} \frac{(Lh)^j}{j!}$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in U_h(x_0)$ . Damit erhalten wir auf  $U_h(x_0)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (y_j(x) - y_{j-1}(x)) \leq \frac{M}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Lh)^j}{j!} \quad (\text{konvergente Majorante})$$

Die Folge  $\{y_n(x)\}$  konvergiert daher auf  $U_h(x_0)$  gleichmässig gegen

$$y(x) := y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(x) - y_{j-1}(x))$$

Da die Funktionen  $y_n$  auf  $U_h(x_0)$  sämtlich stetig sind, ist auch  $y$  als Grenzwert der gleichmässig konvergenten Folge  $\{y_n(x)\}$  dort stetig. Wegen

$$|f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))| \leq L |y_{j-1}(t) - y_{j-2}(t)|$$

ergibt sich aus der gleichmässigen Konvergenz der Folge  $\{y_n(x)\}$  gegen  $y(x)$  die gleichmässige Konvergenz der Folge  $\{f(t, y_n(t))\}$  gegen  $f(t, y(t))$ . Daher darf in der Beziehung

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_0} f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  und die Integration vertauscht werden:

$$y(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_0} f(t, y_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) dt = \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt$$

Das heisst die Näherungslösungen  $y_n(x)$  konvergieren gleichmässig gegen eine Lösung der Integralgleichung und damit der DGL. Das heisst es existiert eine Lösung der DGL.

### 6.2.2 Beweis der Eindeutigkeit einer gefundenen Lösung

Wir nehmen an,  $y(x)$  und  $y^*(x)$  seien zwei beliebige Lösungen des Anfangswertproblems der DGL bzw. der Integralgleichung. Wie oben zeigt man für  $x \in U_h(x_0)$

$$|y(x) - y^*(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) - f(t, y^*(t)) dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y(t) - y^*(t)| dt \right|$$

Setzen wir für beliebiges  $h_0 < h$

$$A := \max_{|x-x_0| \leq h_0} |y(x) - y^*(x)|$$

so ergibt sich

$$|y(x) - y^*(x)| \leq LA |x - x_0| \text{ für } x \in U_{h_0}(x_0)$$

Das Ergebnis eingesetzt in die vorige Ungleichung ergibt

$$|y(x) - y^*(x)| \leq L \cdot LA \left| \int_{x_0}^x |t - t_0| dt \right| = AL^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}, x \in U_{h_0}(x_0)$$

u.s.w. Durch vollständige Induktion gewinnen wir für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$|y(x) - y^*(x)| \leq AL^n \frac{|x-x_0|^n}{n!} < \frac{(Lh)^n}{n!}$$

In dieser Ungleichung ist die linke Seite unabhängig von  $n$ . Die rechte Seite ist das  $n$ -te Glied der Exponentialreihe und strebt daher für  $n \rightarrow \infty$  gegen null.

Hieraus folgt  $y(x) = y^*(x)$  auf  $U_{h_0}(x_0)$  bzw. wegen  $h_0 < h$  beliebig auf  $U_h(x_0)$

Bemerkung 1:

Wie haben im Beweis die Voraussetzung, dass  $f$  auf  $D$  stetig partielle Ableitung bezüglich  $y$  besitzt nicht benutzt jedoch die daraus folgende Ungleichung (Abschätzung)

$$|f(x, y) - f(x, y^\circ)| \leq L |y - y^\circ|$$

die man Lipschitzbedingung nennt. Der Satz von Picard-Lindelöf gilt also bereits für alle Funktionen  $f$ , die auf  $D$  stetig sind und dieser Lipschitzbedingung genügen.



Bemerkung 2:

Bei konkreter Behandlung nach Picard-Lindelöf geht man wie folgt vor:

1. Man prüfe die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf ( $f, \frac{\delta f}{\delta y}$  stetig auf einem geeigneten Rechteck  $D$ )
2. Man berechne die Näherungslösung  $y_n(x)$  mit Hilfe der

*Rekursionsformel (Picard – Lindelöf)*

$$y_0(x) := y_0$$

$$y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, n \in \mathbb{N}$$

## 6.2.3 Beispiel für die Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) = y, \quad y(0) = 1$$

Wegen

$$f(x,y) = y, \quad \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf in ganz  $\mathbb{R}^2$  erfüllt. Wir erhalten folgende Näherungslösungen:

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= 1 \\ y_1(x) &:= 1 + \int_0^x f(t, y_0(t)) dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x \\ y_2(x) &:= 1 + \int_0^x f(t, y_1(t)) dt = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + \frac{(1+x)^2}{2} - \frac{1}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!}$$

Induktionsanfang: (n=0):  $y_0(x) = \sum_{k=0}^0 \frac{(x)^k}{k!} = x^0 = 1$  richtig

Induktionsvoraussetzung:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!}$$

Induktionsschluss: zu zeigen:  $y_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x)^k}{k!}$

$$y_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x f(t, y_n(t)) dt = 1 + \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n \frac{(t)^k}{k!} \right) dt = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^x (t)^k dt = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x)^k}{k!}$$

Die Folge  $\{y_n\}$  konvergiert daher auf jedem endlichem Intervall gleichmäßig gegen  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!}$ , also gegen  $e^x$ .

### 6.3 Elementare Lösungsmethoden

Nur selten ist es möglich, die Lösungen von DGLn explizit durch elementare Funktionen darzustellen. Im folgenden stellen wir einige Typen von DGLn 1-Ordnung zusammen, die auf die Ermittlung von Stammfunktionen, zurückgeführt werden. Die DGLn gelten dann als gelöst.

#### 6.3.1 DGLn der Form $y' = f(x)$

Dies ist der einfachste Fall einer DGL:  $f$  hängt nur von  $x$  ab. Für stetiges  $f$  sind die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf erfüllt. Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = F(x) + C,$$

wobei die Integrationskonstante  $C$  der Anfangsbedingung angepasst werden muss.

Beispiel:

Die DGL  $y' = \sin x$  besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = \int \sin(x) dx + C = -\cos x + C$$

Die Lösung durch den Punkt  $(\pi, 0)$  lautet wegen  $0 = y(\pi) = -\cos\pi + C = 1 + C$  bzw.  $C = -1$ :

$$y(x) = -\cos x - 1$$

### 6.3.2 DGLn mit getrennten Veränderlichen

DGLn der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} = g(x) \frac{1}{h(y)}$$

für die f sich als Produkt einer Funktion die nur von x, und einer Funktion die nur von y abhängt darstellen lässt, heissen DGLn mit getrennten Veränderlichen. Die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf sind erfüllt, falls g stetig sowie h stetig differenzierbar und frei von Nullstellen sind. Seien G und H die entsprechenden Stammfunktionen

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad H(y) = \int_b^y h(t) dt$$

von g und h. Sei Ferner  $H^{-1}$  die Umkehrfunktion von H, das heisst es gilt

$$H^{-1}(H(y)) = y$$

Bemerkung:  $H^{-1}$  existiert, falls  $h = H'$  nirgends verschwindet.

Wir schreiben nun die DGL in der folgenden Form:

$$h(y)y'(x) = g(x)$$

Hieraus folgt durch Integration nach x

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

Wir überprüfen die Behauptung durch Differentiation der obigen Gleichung:

.....  
 .....

Durch Anwendung der Umkehrfunktion  $H^{-1}$  erhalten wir dann mit

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}(G(x) + C)$$

die allgemeine Lösung unserer DGL. Auch hier ist C wieder der Anfangsbedingung anzupassen

1. Man schreibe die DGL  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$  in der Form  $h(y) dy = g(x) dx$
2. Man integriere die linke Seite bezüglich y und die rechte Seite bezüglich x
3. Man löse die dadurch entstehende Gleichung

$$H(y) = G(x) + C \quad \text{nach y auf}$$

Man nennt diese Methode auch Separation der Variablen oder spricht von der Methode der Trennung der Veränderlichen

Beispiel

Wir betrachten die DGL

$$y' = \frac{dy}{dx} = xy$$

die wir in der Form

$$\frac{dy}{y} = x \, dx \quad (y \neq 0)$$

schreiben. Nun integrieren wir die linke Seite bezüglich  $y$ , die rechte Seite bezüglich  $x$  und erhalten

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

also

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C} = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

damit folgt:

$$y = \pm e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

Für  $C_1 = 0$  erhalten wir die oben ausgeschlossenen Lösung  $y(x) = 0$

### 6.3.3 DGL der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Diese DGL lässt sich mit Hilfe der Substitution  $z = \frac{y}{x}$  auf eine DGL mit getrennten Veränderlichen zurückführen: Ist  $f$  stetig differenzierbar, so sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt falls  $x \neq 0$ . Mit

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad y = z \cdot x \quad (x \neq 0) \quad \text{gilt} \quad y' = z + xz'$$

Damit folgt aus der DGL  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$z + xz' = f(z), \quad \text{also} \quad z' = \frac{f(z)-z}{x} \quad (x \neq 0)$$

Diese DGL für  $z(x)$  lässt sich durch Separation lösen

Beispiel

$$x^2 y' = x^2 + xy + y^2, \quad \text{die wir in der Form } y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 =: f\left(\frac{y}{x}\right)$$

schreiben können. Die Substitution  $z = \frac{y}{x}$  führt auf die äquivalente DGL

$$z' = \frac{f(z)-z}{x} = \frac{1+z+z^2-z}{x} = \frac{1+z^2}{x}$$

also, nach Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x} \quad \text{b.z.w.} \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ausführung der Integration liefert

$$\arctan z = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln C_1 = \ln(C_1 |x|), \quad C_1 > 0$$

Wir lösen die Gleichung nach  $z$  auf:

$$z = \tan(\ln(C_1 |x|))$$

Die gesuchte allgemeine Lösung der AusgangsdGL ergibt sich dann mit  $y = x \cdot z$  zu

$$y(x) = x \cdot \tan(\ln(C_1 |x|)), \quad x \neq 0$$

### 6.3.4 DGL der Form $y' = f(ax + by + c)$

Diese lässt sich mit Hilfe der Substitution  $z = ax + by + c$  auf eine DGL mit getrennten Veränderlichen zurückführen: Ist  $f$  stetig differenzierbar, so sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt.

Setzen wir

$$z = ax + by + c \quad \text{so folgt mit} \quad z' = a + by' \quad y' = \frac{z' - a}{b} = f(z)$$

und damit eine DGL vom Typ  $z' = a + bf(z)$

Beispiel

$$\text{Die DGL} \quad y' = (2x + 3y)^2 =: f(ax + by + c)$$

(mit  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ ) geht durch die Substitution  $z = 2x + 3y$  in die DGL

$$z' = a + bf(z) = 2 + 3z^2$$

über, die wir mittels Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\frac{dz}{2 + 3z^2} = dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dz}{2 + 3z^2} = \int dx + C = x + C.$$

Mit der Substitution  $t := \sqrt{\frac{3}{2}}z$  folgt:

$$\int \frac{dz}{2 + 3z^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1 + (\sqrt{\frac{3}{2}}z)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}z\right),$$

und damit

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}z\right) = \sqrt{6}(x + C)$$

Durch Auflösen nach  $z$  erhalten wir

$$z(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan(\sqrt{6}(x + C))$$

und daraus, mit  $z = 2x + 3y$ ,

$$y(x) = \frac{1}{3}(z(x) - 2x) = \frac{1}{3} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \tan(\sqrt{6}(x + C)) - 2x \right].$$

### 6.3.5 Lineare DGL 1-ter Ordnung

Man nennt  $y' = f(x,y)$  eine lineare DGL, wenn **f eine lineare Funktion in y** ist, d.h. eine DGL der Form

$$y' = g(x)y + h(x) \quad \text{bzw.} \quad y' - g(x)y = h(x)$$

mit vorgegebenen Funktionen  $g$  und  $h$  vorliegt. Sind  $g$  und  $h$  stetige Funktionen, so sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Ist  $h \equiv 0$ , so heisst die DGL homogen, andernfalls heisst die DGL inhomogen.

### 6.3.6 homogene lineare DGL

Diese DGLs sind von der Form

$$y' = g(x) \cdot y$$

also eine DGL mit  $h(y) = \frac{1}{y}$ ,  $y \neq 0$  und lässt sich somit nach der Methode der Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\frac{dy}{y} = g(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{y} = \int g(x)dx + C_1$$

also

$$\ln |y| = \int g(x)dx + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Auflösung nach  $y$  liefert die allgemeine Lösung

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{\int g(x)dx}$$

bzw.

$$y(x) = \pm e^{C_1} \cdot e^{\int g(x)dx} = \pm C \cdot e^{\int g(x)dx} \quad C \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(x) \cdot y, \quad y(x_0) = y_0$$

ist dann gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x g(t)dt}$$

Für  $y_0 = 0$  ergibt sich die triviale Lösung  $y(x) \equiv 0$ .



### 6.3.7 Inhomogene lineare DGL

Wir bestimmen zunächst mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$y' = g(x)y + h(x), \quad g, h \text{ stetig.}$$

Bei diesem Verfahren geht man von der allgemeinen Lösung der homogenen DGL aus. Diese lautet wie oben gezeigt:

$$y_{hom}(x) = Ce^{G(x)} \quad \text{mit der Stammfunktion} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$$

von  $g$ . Man ersetzt nun die Konstante  $C$  durch eine stetig differenzierbare Funktion  $C(x)$  und versucht, diese so zu bestimmen, dass

$$y(x) = C(x) e^{G(x)}$$

die inhomogene DGL löst. Hierzu setzt man diesen Ausdruck und seine Ableitung in die DGL ein:

$$C'(x)e^{G(x)} + C(x)G'(x)e^{G(x)} = g(x)C(x)e^{G(x)} + h(x)$$

Wegen  $G'(x) = g(x)$  ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit  $e^{-G(x)}$  für  $C(x)$  die Gleichung

$$C'(x) = h(x)e^{-G(x)}$$

Damit folgt

$$C(x) = \int_{x_0}^x h(t)e^{-G(t)} dt + C_1$$

Durch

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x h(t)e^{-G(t)} dt + C_1 \right] e^{G(x)}$$

ist dann für jede Konstante  $C_1$  eine Lösung der inhomogenen DGL gegeben.

Setzen wir  $C_1 = y_0$  so löst

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x h(t)e^{-G(t)} dt + C_1 \right] e^{G(x)} \quad , \text{ mit} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt,$$

das Anfangswertproblem

$$y'(x) = g(x)y + h(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist dies die einzige Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung: Der Lösungsausdruck

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x h(t)e^{-G(t)} dt + C_1 \right] e^{G(x)} \quad , \text{ mit} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt,$$

für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zeigt, dass sich diese aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL additiv zusammensetzt.

Beispiel: Wir betrachten die DGL

$$y' = \frac{1}{x}y + 5x, \quad x \in (0, \infty), \quad \text{mit der Anfangsbedingung } y(1) = 0.$$

In unserem Beispiel ist also

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = 5x, \quad \text{und} \quad (x_0, y_0) = (1, 0)$$

Für  $g(x) = \frac{1}{x}$  ergibt sich die Stammfunktion

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln|t| \Big|_{t=1}^{t=x} = \ln|x| - \ln|1| = \ln x \quad (x > 0)$$

und daher ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems zu

$$y(x) = \left[ \int_1^x 5te^{-\ln(t)}dt + 0 \right] e^{\ln(x)} = \int_1^x 5t \cdot \frac{1}{t}dt \cdot x = 5x \cdot \int_1^x dt = 5x \cdot t \Big|_{t=1}^{t=x} = 5x(x - 1)$$

## 6.4 Numerische Behandlung von DGLn

Die bisher untersuchten Spezialfälle erschöpfen keinesfalls die in der Praxis auftretenden DGLn. Es seien hier am Rand weiter spezielle Typen von DGLn genannt wie die Bernoullischen DGLn vom Typ

$$y' = g(x)y + r(x)y^\alpha$$

oder die Ricatischen DGLn vom Typ

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

In der Praxis lässt sich nun häufig keine explizite Lösung angeben, so dass man auf Näherungsverfahren angewiesen ist. Die beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf behandelte Methode kann zwar zur numerischen Konstruktion von Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

verwendet werden, aber im allgemeinen lassen sich die auftretenden Integrale nicht explizit bestimmen. In der Praxis benutzt man daher meist auf anderen Prinzipien beruhende Näherungsverfahren. Die Grundidee lässt sich anhand der folgenden (groben) Methode erläutern:

### 6.4.1 Euler-Cauchy Verfahren

Sei  $y(x)$  die (nicht bekannte) exakte Lösung unseres Anfangswertproblems. Wie suchen einen Näherungswert  $y^*(x_0 + h)$  von  $y(x_0 + h)$  an einer Nachbarstelle  $x_0 + h$  von  $x_0$ . Nach dem Mittelwert der Differentialrechnung gilt:

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = h \cdot y'(x_0 + \theta h),$$

mit einem im allgemeinen nicht bekannten  $\theta : 0 < \theta < 1$ . Beachten wir die Anfangsbedingung, so folgt hieraus

$$y(x_0 + h) - y_0 = h \cdot f(x_0 + \theta h, y(x_0 + \theta h)), \quad 0 < \theta < 1$$

also

$$y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0 + \theta h, y(x_0 + \theta h)), \quad 0 < \theta < 1$$

Wir setzen daher als Näherungswert

$$y^*(x_0 + h) := y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der unbekannte Funktionswert  $y(x_0 + h)$  durch den bekannten Wert  $y^*(x_0 + h)$  der Tangente im Punkt  $x_0 + h$  ersetzt wird

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Beim nächsten Schritt ergibt sich die Näherung.

$$y^*(x_0 + 2h) := y^*(x_0 + h) + h \cdot f(x_0 + h, y^*(x_0 + h))$$

Mit der Bezeichnung  $y_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) für die  $n$ -te Näherung erhalten wir den folgenden

Algorithmus : Euler-Cauchy-Verfahren

1. Wähle  $h > 0$
2. Setze  $x_n = x_0 + h \cdot n$
3. Berechne  $y_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) mit Hilfe der Rekursion  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ , ( $n=0,1,2,\dots$ )

Wir gewinnen als Näherungskurve einen Polygonzug durch die Punkte  $(x_n, y_n)$

Zur Beurteilung der Brauchbarkeit des Verfahrens benötigen wir eine Abschätzung für den Fehler

$$y(x_n) - y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wir berechnen zunächst den Fehler beim ersten Näherungsschritt:  
Hierzu sei  $f$  im Rechteck

$$D := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ fest}\}$$

stetig differenzierbar. Dann folgt mit Hilfe der DGL, dass die Funktion  $y(x)$  im Lösungsbereich 2-mal stetig differenzierbar ist. Wenden wir nun die Taylorformel an, so ergibt sich

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2y''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

also wenn die wir wieder DGL und Anfangsbedingung einsetzen,

$$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2y''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

also  $y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \text{Rest}$   
wobei der Rest sich verhält wie  $O(h^2)$

Wegen  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$  folgt dann

$$\boxed{y(x_1) - y_1 = O(h^2)}$$

für den Fehler beim ersten Schritt. Es ist zu erwarten, dass der Fehler bei den weiteren Schritten ( $n > 1$ ) wächst, da dann die fehlerbehafteten Werte  $f(x_n, y_n)$  benutzt werden. Wir zeigen :

$$\boxed{y(x_n) - y_n = O(h) \quad n = 2, 3 \dots}$$

Hierzu zeigen wir den folgenden Satz

**Satz 6.2**

Sei  $f$  im Rechteck  $D$  stetig differenzierbar und  $|f_y(x, y)| \leq A$  in  $D$ . Ferner gelte in einer Umgebung  $U_0$  von  $x_0$  die Abschätzung  $|y''(x)| \leq B$ . Dann gilt die Abschätzung

$$y(x_n) - y_n \leq \frac{B}{2} \frac{e^{A(x_n - x_0)} - 1}{A} h, \quad n = 2, 3, \dots$$

Beweis: Für die exakte Lösung gilt nach Taylor

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n + \theta_n h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n + \theta_n h)$$

Mit  $0 < \theta_n < 1$ ,

Für die Näherungslösung gilt nach der Definition des Verfahrens

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Der Fehler ergibt sich damit zu

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + h[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{1}{2}h^2y''(x_n + \theta_n h)$$

Mit  $0 < \theta_n < 1$ ,

Für den Ausdruck in der eckigen Klammer gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$[\dots] = f_y(x_n, y_n^*)(y(x_n) - y_n), \quad \text{mit } y^* \text{ zwischen } y(x_n) \text{ und } y_n$$

Damit folgt

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = (1 + hf_y(x_n, y_n^*)) \cdot (y(x_n) - y_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n + \theta_n h)$$

Mit  $0 < \theta_n < 1$ ,

bzw. aufgrund der Voraussetzungen an  $f_y$  bzw.  $y''$

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq (1 + hA) |y(x_n) - y_n| + \frac{1}{2}Bh^2$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion beweisen wir nun die im Satz behauptete Ungleichung. Diese gilt trivialerweise für  $n=0$  (Induktionsverankerung). Wir nehmen an sie gelte auch für ein (festes)  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n+1} \in U_0$  (Induktionsvoraussetzung) und zeigen, dass sie auch für  $n + 1$  gilt (Induktionsschluss):

Setzen wir die Induktionsvoraussetzung in die Ungleichung ein so gilt:

$$\begin{aligned} |y(x_{n+1}) - y_{n+1}| &\leq (1 + hA) \frac{1}{2}B \frac{e^{A(x_n - x_0)} - 1}{A} h + \frac{1}{2}Bh^2 = \frac{Bh^2}{2} \left[ (1 + hA) \left( \frac{e^{A(x_n - x_0)} - 1}{hA} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{Bh^2}{2} \frac{(1 + hA)e^{A(x_n - x_0)} - 1}{hA} = \frac{B}{2} \frac{(1 + hA)e^{A(x_n - x_0)} - 1}{A} h \end{aligned}$$

Aus der Reihenentwicklung von  $e^{hA}$  folgt für  $h > 0$  die Ungleichung

$$e^{hA} = 1 + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \dots \geq 1 + hA$$

Daher gilt mit  $x_{n+1} = x_n + h$

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{B e^{hA} e^{A(x_n - x_0)} - 1}{A} h = \frac{B e^{A(x_n + h - x_0)} - 1}{A} h = \frac{B e^{A(x_{n+1} - x_0)} - 1}{A} h$$

Bemerkung:

In der Praxis wird das Euler-Cauchy-Verfahren meist verwendet um sich einen groben Überblick über den Lösungsverlauf zu verschaffen. Es ist im allgemeinen dann unzweckmässig, wenn an den betrachteten Stellen grosse Steigungen auftreten.

Genauere Verfahren erhält man, wenn man die gesuchte Lösung  $y(x)$  in einer Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  von höherer Ordnung approximiert. Dies lässt sich z.B. dadurch erreichen, dass man zur Bestimmung eines Näherungswertes  $y_{i+1}$  an einer Stelle  $x_{i+1} = x_i + h$  vom Steigungswert an der Stelle  $x_i + \frac{h}{2}$  ausgeht, also Zwischenpunkte einschaltet:

Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)$$

...

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right), \quad (n=1, 2, \dots)$$

Besonders empfehlenswert ist das Runge-Kutta-Verfahren, auf das hier aber nicht mehr eingegangen werden kann.





## 7 Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

**Im  $\mathbb{R}^1$ :** Flächenberechnung

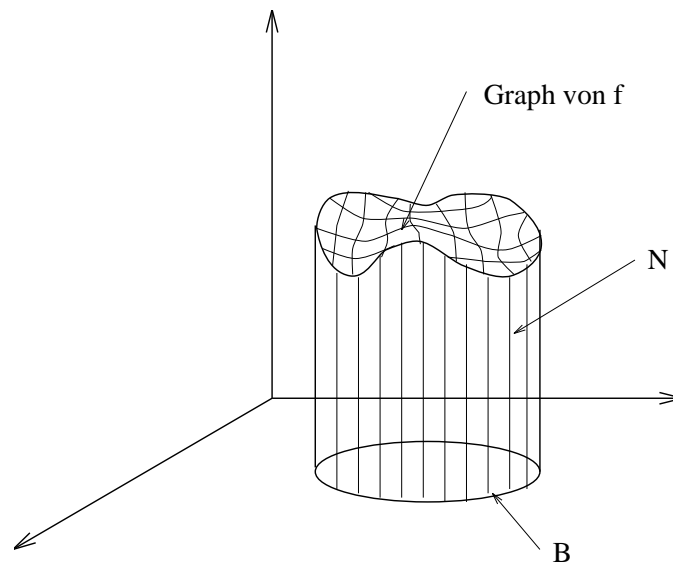
**Im  $\mathbb{R}^2$ :** Volumenberechnung. Rotationskörper, etc.

**Im  $\mathbb{R}^3$ :** z.B. Gesamtladung einer 3-dim. Ladungsverteilung, Schwerpunkt.

### 1.) Integration bei zwei Variablen ( anschauliche Einführung)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $B \subset \mathbb{R}^2$  kompakt und  $f(x, y) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in B$  und der Flächeninhalt von  $B$  sei wohlbestimmt.

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}$$



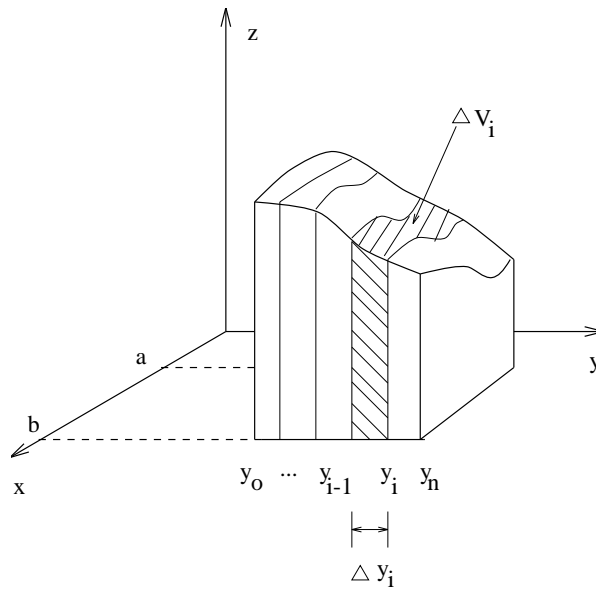
**Definition 7.1** Der Rauminhalt  $V$  der Menge  $M$  wird das **Integral** von  $f$  über dem Bereich  $B$  genannt und durch

$$\begin{aligned} V &:= \iint_B f(x, y) dx dy := \iint_B f(x, y) dF \\ &:= \int_B f(x, y) dx dy := \int_B f(x, y) dF \\ &:= \int_B f(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

beschrieben.

**Wie berechnet man  $V$  ?**

Sei  $B$  ein Rechteck :  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$



eine Scheibe:  $\Delta V_i \approx \Delta y_i \int_a^b f(x, y) dx$

$$\text{alle Scheiben} : V \approx \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f(x, y_i) dx \right) \Delta y_i$$

für  $n \rightarrow \infty$  und  $\max \Delta y_i \rightarrow 0$  gilt:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f(x, y_i) dx \right) \Delta y_i = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

**Satz von Fubini:**

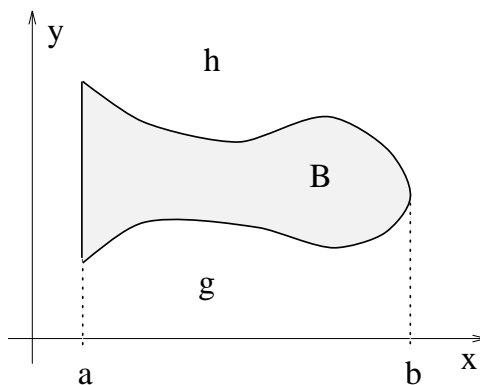
$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

**Integration über Normalbereiche**

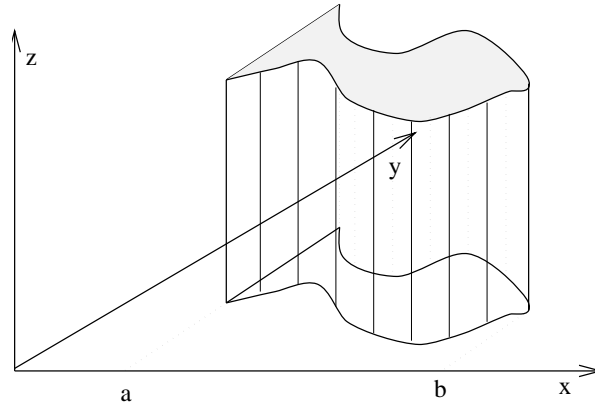
seien  $\left. \begin{array}{l} g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$  stetig und  $h \geq g$ . Dann ist

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{array} \right\}$$

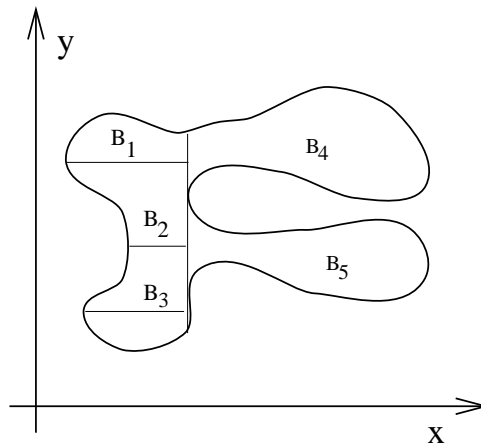
ein Normalbereich.



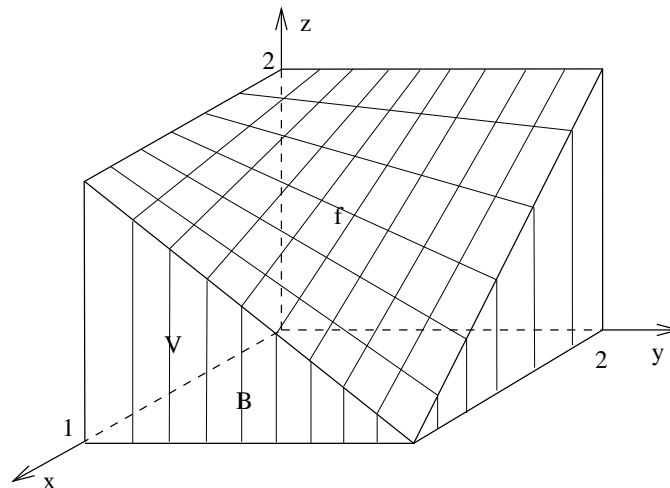
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$



### Integration über Nicht-Normalbereiche



**Beispiel 7.1**  $f(x, y) = 2 - xy$  ( aus [BHW89] )



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \right\}$$

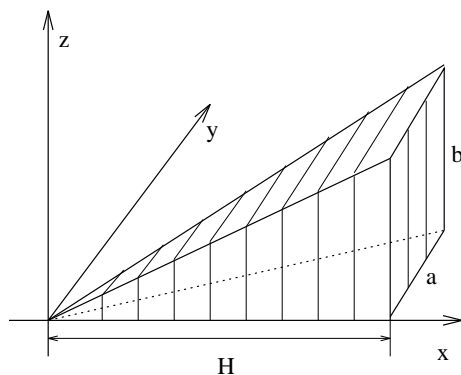
$$\begin{aligned}
 V &= \iint_B (2 - xy) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 (2 - xy) dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[ 2x - \frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^2 \left( 2 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[ 2y - \frac{y^2}{4} \right]_0^2 = 3
 \end{aligned}$$

**Beispiel 7.2** Mit  $f(x, y) := \frac{b}{H}x$ ,  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H \\ 0 \leq y \leq \frac{a}{H}x \\ 0 \leq z \leq \frac{b}{H}x \end{array} \right\}$  ( aus [BHW89] ) und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq H \\ 0 \leq y \leq \frac{a}{H}x \end{array} \right\}$$

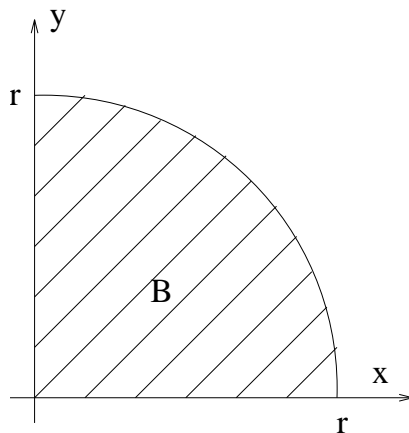
ist das Volumen der Pyramide damit

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_B f(x, y) dx dy = \frac{b}{H} \int_0^H \int_0^{\frac{a}{H}x} x dy dx = \\
 &= \frac{b}{H} \int_0^H [xy]_0^{\frac{a}{H}x} dx = \frac{ba}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{ba}{H^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^H = \frac{abH}{3}
 \end{aligned}$$



**Beispiel 7.3** Es soll  $V = \iint_B x^3 y^2 dx dy$  aus [BHW89] berechnet werden, wobei  $B$  der skizzierte Viertelkreis ist. Da  $B$  ein Normalbereich ist, folgt:

$$V = \int_0^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} x^3 y^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^r x^3 (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$



Mit  $u = x^2$  und  $v' = x(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$  also  $(v = -\frac{1}{5}(r^2 - x^2)^{\frac{5}{2}})$  liefert die Produktintegration:

$$V = \underbrace{-\frac{1}{15} \left[ x^2 (r^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^r}_{0} + \frac{2}{15} \int_0^r x (r^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx = -\frac{2}{15} \left[ \frac{1}{7} (r^2 - x^2)^{\frac{7}{2}} \right]_0^r = \frac{2}{105} r^7$$

Vertauscht man die Rollen von  $x$  und  $y$ , so ergibt sich das Integral auf folgende zweite Weise:

$$V = \int_0^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} x^3 y^2 dx \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^r y^2 (r^2 - y^2)^2 dy = \frac{1}{4} \int_0^r (r^4 y^2 - 2r^2 y^4 + y^6) dy = \frac{2}{105} r^7$$

Dieser Weg ist etwas einfacher. Man sieht, daß man durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge evtl. Rechenaufwand einsparen kann.

#### Beispiel 7.4 Volumen eines Ellipsoids

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$,,\text{Deckel}'' : z = f(x, y) := c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

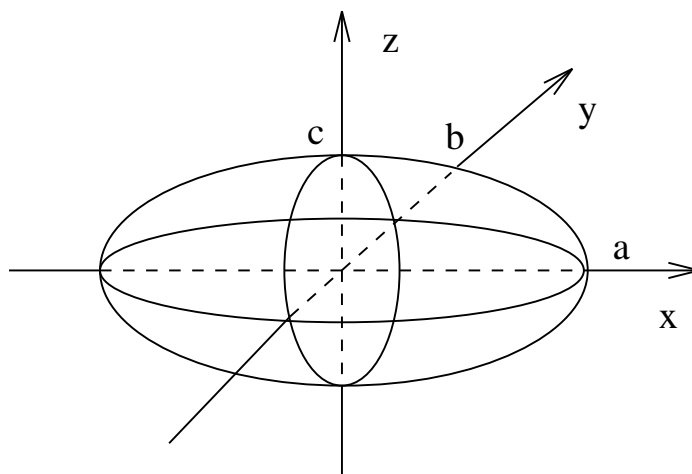
$$\text{mit } B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Mit  $p = \sqrt{1 - (x/a)^2}$  berechnet man

$$\begin{aligned} V &= \iint_B c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy dx = \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy dx \\ &= \int_{-a}^a \int_{-bp}^{bp} c \sqrt{p^2 - \frac{y^2}{b^2}} dy dx \stackrel{\frac{y}{bp} = t}{=} c \int_{-a}^a \int_{-1}^1 p \sqrt{1 - t^2} \underbrace{bp}_{\frac{dy}{dt}} dt dx = cb \int_{-a}^a p^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt dx \\ &= cb \int_{-a}^a p^2 \frac{\pi}{2} dx = \frac{cb\pi}{2} \int_{-a}^a 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{cb\pi}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{cb\pi}{2} \frac{4}{3} a = \frac{2}{3} abc\pi \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Volumen des Ellipsoids  $= \frac{4}{3} \pi abc$ .

$\Rightarrow$  Volumen einer Kugel mit Radius  $r$ :  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .



**Definition 7.2** 1. Sei  $M$  eine nach oben beschränkte Menge mit  $y \leq c \forall y \in M$ . Die kleinste obere Schranke von  $M$  heißt **Supremum** von  $M$ , kurz  $\sup M$ .

2. Analog wird für eine nach unten beschränkte Menge  $M$  das **Infimum** als **größte untere Schranke**  $\inf M$  definiert.

Schreibweise:

$$\sup f(x) := \sup \{f(x) \mid x \in A\}$$

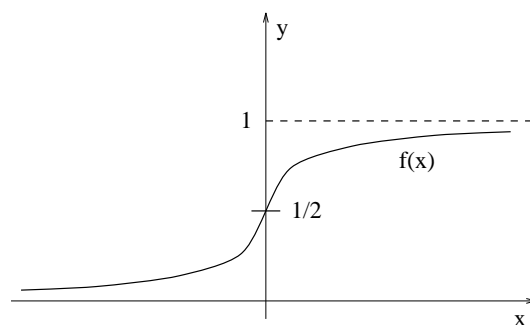
$$\inf f(x) := \inf \{f(x) \mid x \in A\}$$

**Beispiel 7.5** 1.  $\inf \mathbb{R}^+ = 0 = \inf \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

2. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  Es gilt  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 2$ , aber  $2 \neq \sup f(x)$

$$\sup f(x) = 1$$

$$\inf f(x) = 0$$



## 7.1 Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$

Die Definition von Integralen mehrerer Variabler folgt nahezu wörtlich derjenigen für zwei Variablen. Sie Stützt sich lediglich auf Quader, den Analoga zu Rechtecken im Höherdimensionalen.

**Definition 7.3 a)** *Eine Menge der Form*

$$Q = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

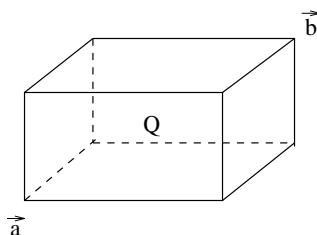
heißt **Quader**. Dabei sind  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  beliebige reelle Zahlen mit  $a_i < b_i$  für alle  $i$ . Man beschreibt den Quader auch als kartesisches Produkt von Intervallen in der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**b)** *Die Zahl*

$$V_Q := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

heißt **Inhalt** oder **Volumen** des Quaders  $Q$ . Faßt man die  $a_i$  bzw. die  $b_i$  in zwei Vektoren zusammen, so ist  $\delta_Q := |\vec{b} - \vec{a}|$



**Definition 7.4 Riemannsches Integral im  $\mathbb{R}^n$ :**

1. Es sei  $f$  eine reelle beschränkte Funktion auf einem Quader  $Q$ , und  $Z = (Q_1, \dots, Q_m)$

sei eine beliebige Zerlegung von  $Q$  in Teilquader. Die Inhalte der Teilquader  $Q_i$  werden mit  $V_{Q_i}$  bezeichnet.

2. Mit  $M_i := \sup f(\vec{x}), m_i := \inf f(\vec{x})$  bildet man

$$S_f(Z) := \sum_{i=1}^m M_i V_{Q_i}, \text{ genannt Obersumme von } f \text{ bez. } Z,$$

$$s_f(Z) := \sum_{i=1}^m m_i V_{Q_i}, \text{ genannt Untersumme von } f \text{ bez. } Z,$$

und

$$I_f := \inf S_f(Z), \text{ genannt Oberintegral von } f \text{ auf } Q,$$

$$I_f := \sup s_f(Z), \text{ genannt Unterintegral von } f \text{ auf } Q,$$

Infimum und Supremum werden dabei bez. sämtlicher Zerlegungen  $Z$  von  $Q$  gebildet.

3. Stimmen Ober- und Unterintegral von  $f$  auf  $Q$  überein, so heißt  $f$  (**Riemann-**) **integrierbar** auf  $Q$ . In diesem Falle heißt der gemeinsame Wert  $I_f = I_f$  das (**Riemannsche**) **Integral** von  $f$  auf  $Q$ , beschrieben durch

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Auch andere Schreibweisen, wie

$$\iint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_Q f dV$$

usw. sind üblich.

$f$  heißt integrierbar auf  $B$ , wenn  $f$  integrierbar ist auf  $Q_B$ , und man setzt

$$\int_B f(\vec{x}) d\vec{x} := \int_{Q_B} f^*(\vec{x}) d\vec{x}$$

Auch hier sind andere Schreibweisen geläufig. Insbesondere im Falle dreier Variabler schreibt man die Variablen gern als  $x, y, z$ . Integrale in drei Variablen werden daher vielfach in der Form.

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$



beschrieben.

**Definition 7.5 Inhalt einer Menge** (auch **Volumen** genannt):

Eine kompakte Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  heißt (**Jordan-**)**meßbar**, wenn das Integral

$$\int_B 1d\vec{x}$$

existiert. Sein Wert wird **Inhalt** (**Volumen**)  $V_B$  von  $B$  genannt.

Im Fall dreier Variabler spricht man auch vom **Rauminhalt**. Ein Kompaktum mit Inhalt 0 nennt man eine **Nullmenge**, und man gewinnt wie im  $\mathbb{R}^2$  den Satz:

### Satz 7.1

Eine kompakte Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann meßbar, wenn ihr Rand eine Nullmenge ist.

### Satz 7.2

- a) Es seien  $f$  und  $g$  integrierbare Funktionen auf dem Kompaktum  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Dann sind auch  $f + g$  und  $cf$  ( $c$  reell) integrierbar auf  $B$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} \iint_B (f + g)dF &= \iint_B f dF + \iint_B g dF \\ \iint_B c f dF &= c \iint_B f dF \end{aligned}$$

für jedes reelle  $c$ .

- b) Es sei  $f$  auf dem Kompaktum  $B$  definiert.  $B$  sei zerlegt in kompakte Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . (D.h.  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$  und  $B_i \cap B_k = \emptyset$  für  $i \neq k$ .) Ist  $f$  auf jedem  $B_i$  integrierbar, so auch auf  $B$ , und es gilt

$$\iint_B f dF = \iint_{B_1} f dF + \iint_{B_2} f dF + \dots + \iint_{B_m} f dF$$

Die einfachen Beweise können dem Leser überlassen bleiben. Zu jedem  $B_i$  kann man eine Funktion  $f_i$  erklären mit  $f_i(\vec{x}) = f(\vec{x})$  auf  $B_i$  und sonst  $f_i(\vec{x}) = 0$ . Damit ist  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$  auf  $B$ .

**Satz 7.3** *Mittelwertsatz für Bereichsintegrale:*

Es sei  $f$  integrierbar auf dem meßbaren Kompaktum  $B \subset \mathbb{R}^n$ .  $F_B$  sei der Flächeninhalt von  $B$ . Dann folgt mit  $m = \inf f(\vec{x})$ ,  $M = \sup f(\vec{x})$ :

$$mF_B \leq \iint_B f dF \leq MF_B$$

Ist  $B$  überdies wegweise zusammenhängend und  $f$  stetig, so existiert ein Punkt  $\vec{x}_0 \in B$  mit

$$\iint_B f dF = F_B f(\vec{x}_0)$$

**Bemerkung:**  $B$  heißt wegweise zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  aus  $B$  durch einen Weg in  $B$  verbinden lassen.

## 7.2 Grundlegende Sätze

**Satz 7.4**

Jede stetige reellwertige Funktion auf einem meßbaren Kompaktum  $B$  in  $\mathbb{R}^n$  ist integrierbar.

**Satz 7.5** *Bereichsintegrale als Mehrfachintegrale*

Es sei  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion auf dem Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

Existieren die Integrale innerhalb der Klammern in der folgenden Formel, so gilt

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \cdots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Die gleiche Aussage gilt bei beliebiger Vertauschung der Variablen  $x_1, \cdots, x_n$  und entsprechender Vertauschung der Integrationsgrenzen  $a_i, b_i$ .

**Bemerkung:**

- Die Klammern in der Schreibweise der Mehrfachintegrale läßt man auch weg.
- Die Existenz der Integrale in den Klammern ist gesichert, wenn  $f$  stetig ist. Da Quader als Integrationsgebiete zu speziell sind, definieren wir wie im Zweidimensionalen – Normalbereiche.

**Definition 7.6** *Unter einem Normalbereich im  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir eine Menge  $B$  der Form*

$$B = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n \mid \left. \begin{array}{l} g_1 \leq x_1 \leq h_1 \\ g_2(x) \leq x_2 \leq h_2(x) \\ g_3(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h_3(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{array} \right\}$$

wobei  $g_2, \cdots, g_n, h_2, \cdots, h_n$  stetige reellwertige Funktionen sind, und  $g_1, h_1$  reelle Konstante. Dabei gilt  $g_i \leq h_i \forall i$ .

Man spricht auch von einem Normalbereich  $B$ , wenn die Reihenfolge der Indizes  $1, 2, \dots, n$  beliebig umgestellt ist. Normalbereiche sind **meßbar**, wenn man ähnlich wie im Zweidimensionalen einsieht. Damit gilt der **für die praktische Integralberechnung entscheidende Satz**:

### Satz 7.6

Ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf einem Normalbereich  $B$ , so gilt

$$\int_B f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{g_1}^{h_1} \left( \int_{g_2(x_1)}^{h_2(x_1)} \left( \int_{g_3(x_1, x_2)}^{h_3(x_1, x_2)} \left( \dots \left( \int_{g_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Die Klammern werden auch weggelassen. Für andere Reihenfolgen der Indizes  $1, 2, \dots, n$  gilt natürlich entsprechendes.

Durch „Auflösen der Integrale von innen nach außen“ kann man mit dieser Formel die Zahlenwerte von Integralen bestimmen.

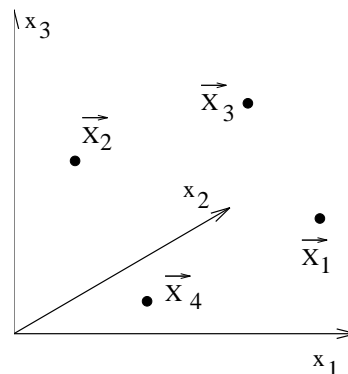
### Beispiel 7.6 Schwerpunktberechnung

a) endlich viele Massenpunkte

$$m_1, m_2, \dots, m_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$$

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\vec{S} = \text{Schwerpunkt}$$



b) ausgedehnte Körper im  $\mathbb{R}^3$  mit Massendichtefunktion  $\rho(x)$

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \iiint_B \int \rho(\vec{x}) \vec{x} dV = \frac{1}{M} \iiint_B \int \rho(\vec{x}) \vec{x} dx dy dz$$

$$M = \iiint_B \int \rho(\vec{x}) dx dy dz$$

Spezialfall homogene Massenverteilung, d.h.  $\rho(x) = \text{const} = 1$

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{1}{M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} x dz dx dy = \frac{1}{M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} [xy]_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dx dy \\
 &= \frac{1}{M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} x(f_2(x,y) - f_1(x,y)) dx dy \\
 S_y &= \frac{1}{M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} y(f_2(x,y) - f_1(x,y)) dx dy \\
 S_z &= \frac{1}{M} \iiint_B z dz dx dy = \frac{1}{2M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} [z^2]_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz dx dy \\
 &= \frac{1}{2M} \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} (f_2^2(x,y) - f_1^2(x,y)) dx dy
 \end{aligned}$$

Schwerpunkt einer Halbkugel mit  $\rho = \text{const} = 1$

$$\begin{aligned}
 S_x &= \frac{1}{M} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} x \sqrt{r^2-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{M} \int_{-r}^r \left[ -\frac{1}{3}(r^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dy \\
 &= \frac{1}{M} \int_{-r}^r 0 dy = 0 \\
 S_y &= 0 \\
 S_z &= \frac{1}{2M} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} (r^2-x^2-y^2) dx dy = \frac{1}{2M} \int_{-r}^r \left[ (r^2-y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dy \\
 &= \frac{1}{2M} \int_{-r}^r 2 \left( (r^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{1}{M} \frac{2}{3} \int_{-r}^r (r^2-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \\
 \text{Subst.: } &u = \frac{y}{r} \quad dy = \frac{dy}{du} du = r du \quad \Rightarrow \\
 S_z &= \frac{1}{M} \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (r^2 - r^2 u^2)^{\frac{3}{2}} r du = \frac{2}{3M} r^4 \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\frac{3}{2}} du \\
 &= \frac{r}{\pi} \frac{1}{4} \left[ u(1-u^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} u \sqrt{1-u^2} + \frac{3}{2} \arcsin u \right]_{-1}^1 = \frac{r}{4\pi} \left[ \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right] = \frac{6\pi r}{16\pi} = \frac{3}{8} r
 \end{aligned}$$

## 7.3 Koordinatentransformation in Integralen

1-dim.:

$$\begin{aligned}
 x &\mapsto u(x) \\
 \int_a^b f(x) dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \frac{dx}{du} du
 \end{aligned}$$

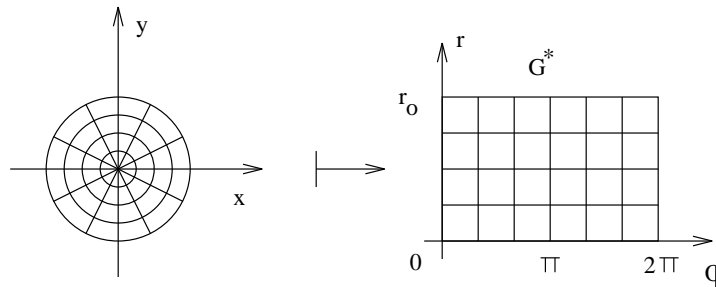
n-dim.:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &\mapsto \vec{T}(\vec{x}) \\
 \int \cdots \int f(\vec{x}) d\vec{x} &=?
 \end{aligned}$$

7.3.1 Herleitung im  $\mathbb{R}^2$ 

**Beispiel 7.7** Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  Kreisscheibe mit Radius  $r_0$ :

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 1 dr d\varphi = r_0 2\pi \neq \text{Fläche!}$$

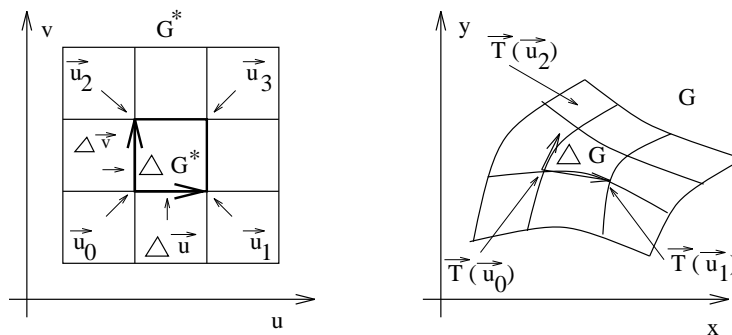


## 7.3.2 Allgemein

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in G^* \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$T : G^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei stetig !

$$\vec{x} = T(\vec{u})$$



$$\vec{T}(\vec{u}_1) \approx \vec{T}(\vec{u}_0) + \frac{\partial \vec{T}}{\partial u}(\vec{u}_0) \Delta u$$

$$\vec{T}(\vec{u}_2) \approx \vec{T}(\vec{u}_0) + \frac{\partial \vec{T}}{\partial v}(\vec{u}_0) \Delta v$$

$$\vec{\tau} = \vec{T}(\vec{u}_1) - \vec{T}(\vec{u}_0) \approx \frac{\partial \vec{T}}{\partial u}(\vec{u}_0) \Delta u$$

$$\vec{\delta} = \vec{T}(\vec{u}_2) - \vec{T}(\vec{u}_0) \approx \frac{\partial \vec{T}}{\partial v}(\vec{u}_0) \Delta v$$

Fläche von

$$\Delta G \approx \left| \det(\vec{\tau}, \vec{\delta}) \right| \approx \left| \det \left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial u}(\vec{u}_0), \frac{\partial \vec{T}}{\partial v}(\vec{u}_0) \right) \right| \Delta u \Delta v = \left| \det \vec{T}'(\vec{u}_0) \right| \Delta u \Delta v$$

$$\lim_{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \rightarrow 0} \frac{\text{Fläche von } \Delta G}{\text{Fläche von } \Delta G^*} = \left| \det \vec{T}'(\vec{u}_0) \right|$$

$\vec{T}'(\vec{u}_0)$  = Ableitungsmatrix im Punkt  $\vec{u}_0$

**Beispiel 7.8** Polarkoordinaten

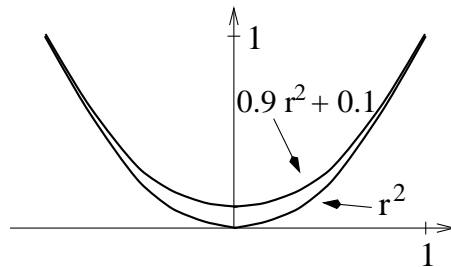
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\det T'(r, \varphi)| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \end{aligned}$$

**Fläche des Kreises mit Radius R:**

$$F = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \pi R^2$$

**Beispiel 7.9** Volumen einer (runden) Schale mit dem skizzierten Querschnitt.



$$B = \text{Einheitskreis (scheibe)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$V = \int_B -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.1 dx dy = 0.1\pi - 0.1 \underbrace{\int_B (x^2 + y^2) dx dy}_I$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad V = 0.1 \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{20}$$

|| **Definition 7.7** Eine Teilmenge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt Gebiet, wenn  $G$  offen und zusammenhängend ist. (nicht in zwei offene Mengen zerlegbar).

|| **Definition 7.8** Seien  $G^* \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^n$  Gebiete.  $T : G^* \rightarrow G$  heißt Transformation, wenn  $T$  bijektiv und stetig differenzierbar ist mit  $\det T'(\vec{u}) \neq 0 \quad \forall \vec{u} \in G^*$

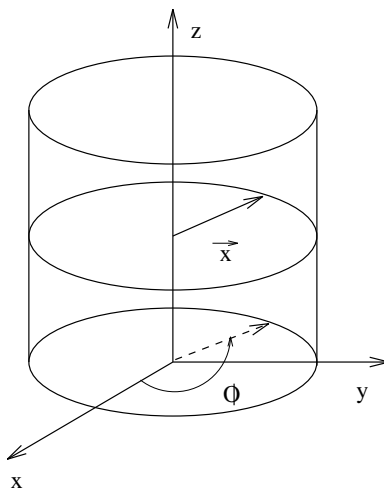
**Satz 7.7**

Seien  $G^* \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^n$  und  $T : G^* \rightarrow G$  eine Transformation und  $B^* \subset G^*$  kompakt und meßbar. Mit  $B = T(B^*)$  sei  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $B$  meßbar und es gilt:

$$\int_B f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{B^*} f(T(\vec{u})) \left| \det T'(\vec{u}) \right| d\vec{u}$$

**Beispiel 7.10** 1. **Zylinderkoordinaten**

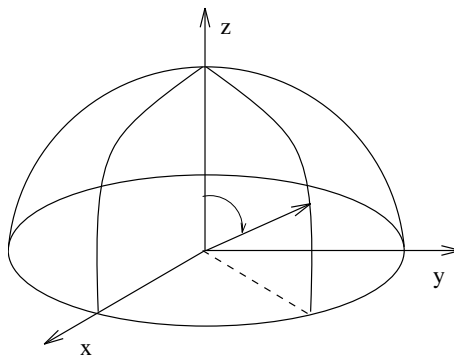
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ T : y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$



$$\det T' = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

**2. Kugelkoordinaten**

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



$$\det T' = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = r^2 \sin \theta$$

**Beispiel 7.11 ( nochmal Schwerpunkt einer Halbkugel)**

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{M} \int_B z dV = \quad M = \frac{2}{3} \pi a^3 \quad (a = r) \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \underbrace{r \cos \theta}_{\text{}} \underbrace{r^2 \sin \theta}_{\text{}} dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{1}{M} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{M} \frac{1}{2} 2\pi \frac{a^4}{4} \\ &= \frac{3\pi a^4}{2\pi a^3 4} = \frac{3}{8} a \end{aligned}$$

## 8 Grundlagen der Vektoranalysis

**Anwendung:** Berechnung von Potentialen und Feldern in Elektrostatik, Elektrodynamik, Gravitationstheorie, Strömungslehre, etc.

**Es gilt:** für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R} (D \subset \mathbb{R}^n)$   $\text{grad}(fg) = g \text{grad} f + f \text{grad} g$ .

**Schreibweise:** Stat  $\text{grad} f$  schreibt man auch  $\nabla f$  („**Nabla** f“).  $\nabla$  ist ein vektorwertiger **Differentialoperator**

$$\begin{aligned} \nabla &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ \nabla f &:= \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Multiplikation mit Skalar

|| **Definition 8.1** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Jede Funktion  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird **Vektorfeld** genannt.  
**Beispiel:** Der Gradient einer Funktion  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Vektorfeld.

|| **Definition 8.2** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt  $\text{div} \vec{f} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  die **Divergenz** des Vektorfeldes.

**Anwendung:** Die elektr. Feldstärke  $\vec{E}(\vec{x})$  ist ein Vektorfeld. Im ladungsfreien Raum (Vakuum) gilt:

$$\text{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0$$



Die Eigenschaft  $\operatorname{div} \vec{f} = 0$  nennt man **Quellenfreiheit** eines Vektorfeldes.

**Schreibweise:**  $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i$  (Skalarprodukt)

**Definition 8.3** Sei  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $D \subset \mathbb{R}^3$  offen) ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{rot} \vec{f} := \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

die **Rotation** des Vektorfeldes  $\vec{f}$ .

**Lemma 8.1** Sei  $\nu: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$ ),  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dann gilt:

$$\operatorname{div}(\nu \vec{f}) = \operatorname{grad} \nu \vec{f} + \nu \operatorname{div} \vec{f}$$

oder

$$\nabla(\nu \vec{f}) = (\nabla \nu) \vec{f} + \nu (\nabla \vec{f})$$

**Beweis:**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\nu(\vec{x}) f_i(\vec{x})) = \frac{\partial \nu(\vec{x})}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) + \nu(\vec{x}) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu(\vec{x}) f_i(\vec{x})) = \operatorname{grad} \nu(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) + \nu(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})$$

**Beispiel 8.1** 1.  $\operatorname{div} \vec{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$

2.  $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r}$   $\vec{f}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{r} = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \vec{x} + \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{x}$$

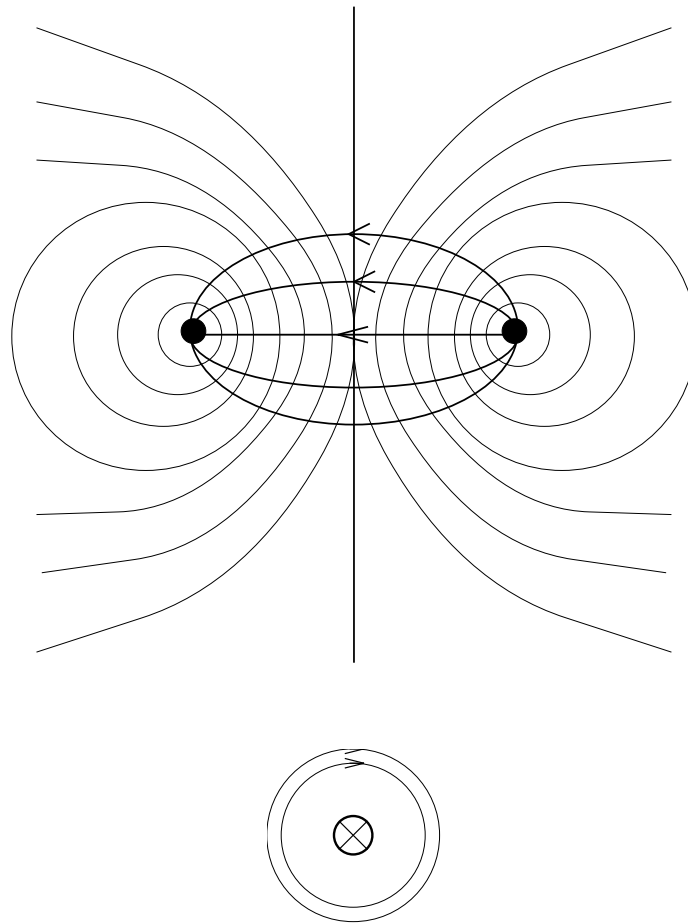
$$= -\frac{\vec{x}}{r^3} \vec{x} + \frac{n}{r} = -\frac{r^2}{r^3} + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r}$$

**Bemerkung:** Ein rotationsfreies Vektorfeld enthält keine Wirbel, d.h. keine geschlossenen Feldlinien.

**Definition 8.4** Feldlinien sind alle Linien in Richtung des Vektorfeldes

**Beispiel 8.2** (Elektr. Feld zwischen zwei Punktladungen:

**aber:** Magnetfeld eines stromdurchfl. Leiters  $\operatorname{rot} \vec{f} \neq 0$  geschlossene Feldlinien



**Satz 8.1**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Ist  $\nu : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar so gilt:

$$\text{rotgrad}\nu = 0$$

**Bemerkung:**  $\text{rot}\vec{f} = 0$  ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines **Potentials** zum Vektorfeld  $\vec{f}$ .

⇒ Nur wirbelfreie Vektorfelder  $\vec{f}$  besitzen ein Potential  $\nu$  derart, daß  $\vec{f} = \text{grad}\nu$  ( $\nu : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ )

⇒ kein (skalares) Potential bei turbulenten Strömungen und Magnetfeldern!

**Beweis von Satz 12:** Sei  $\vec{f} = \text{grad}\nu$ . Dann gilt für die 1. Komponente von  $\text{rot}\vec{f} = \text{rotgrad}\nu$ .

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\nu}{\partial x_3\partial x_2} = 0$$

**Bemerkung:** Es gilt  $\text{rot}\vec{f} = \nabla \times \vec{f}$

## 8.1 Der Laplace-Operator

**Definition 8.5** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n, \nu : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann ist

$$\Delta \nu := \operatorname{divgrad} \nu = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_n^2}$$

und man nennt  $\Delta = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_n^2}$  den **Laplace-Operator**. Die Gleichung  $\Delta \nu = 0$  heißt **Potentialgleichung**.

**Beispiel 8.3** Gravitationspotential einer Punktmasse.

$\Rightarrow$  Kugelsymmetrie, d.h. das Potential hängt nur vom Abstand  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  ab.

Für  $n = 3$  (d.h. im  $\mathbb{R}^3$ ) ist  $\nu(r) = \frac{c}{r}$  Lösung von  $\Delta \nu = 0$ .

Für  $n = 2$  (d.h. im  $\mathbb{R}^2$ ) ist  $\nu(r) = c \ln r$  Lösung von  $\Delta \nu = 0$ . Beweis als Übung.

**gesucht:** allg. Lösung (kugelsymm.)  $\nu : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\Delta \nu = 0$

$$(1) \operatorname{grad} \nu(r) = \nu'(r) \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \nu'(r) \frac{\vec{x}}{r}$$

**Lemma 8.2**

$$\begin{aligned} \Delta \nu(r) &= \operatorname{divgrad} \nu(r) = \operatorname{div} \left( \nu'(r) \frac{\vec{x}}{r} \right) \\ &= \nu''(r) \frac{\vec{x} \vec{x}}{r r} + \nu'(r) \frac{n-1}{r} \\ &= \nu''(r) + \frac{n-1}{r} \nu'(r) \end{aligned}$$

für  $n \geq 3$  ist  $\nu(r) = \frac{r}{r^{n-2}}$  Lösung von  $\Delta \nu = 0$ , da

$$\nu'(r) = \frac{-(n-2)}{r^{n-2}} \quad \nu''(r) = \frac{(n-2)(n-1)}{r^{n-1}}$$

für  $n = 3$  folgt:  $\nu(r) = \frac{1}{r}$  für  $n = 2$  ist  $\nu(r) = \ln r$  Lösung von  $\Delta \nu = 0$ , da  $\nu'(r) = \frac{1}{r}$   $\nu''(r) = -\frac{1}{r^2}$