Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a(5) Entwickeln Sie f in ein Taylorpolynom in einem (beliebigen) Punkt $x_0 = a$ bis zum Grad 3 (Polynom vom Grad ≤ 3).

$$f(x) = e^x - e^{-x}, \quad f'(x) = e^x + e^{-x}, \quad f''(x) = e^x - e^{-x}, \quad f'''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$T_{f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$= e^a - e^{-a} + (e^a + e^{-a})(x-a) + \frac{e^a - e^{-a}}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a + e^{-a}}{3!} \cdot (x-a)^3$$

b(5) Wählen Sie nun den speziellen Entwicklungspunkt $x_0 = a = 0$ und zeigen Sie, daß das obige Taylorpolynom für diesen Entwicklungspunkt eine ungerade Funktion ist.

$$T_{f,0}(x) = \underbrace{e^0 - e^{-0}}_{0} + (e^0 + e^{-0})(x-0) + \frac{e^0 - e^{-0}}{2!}(x-0)^2 + \frac{e^0 + e^{-0}}{3!} \cdot (x-0)^3$$

$$= 0 + 2x + 0 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 = 2x + \tfrac{1}{3}x^3$$

ungerade wegen $T_{f,0}(-x) = -2x - \tfrac{1}{3}x^3 = -T_{f,0}(x)$

c(5) Geben Sie die Funktion für das Restglied dieses Taylorpolynoms für eine beliebige Stelle x an und berechnen Sie das Restglied dieses Taylorpolynoms für die Stelle x=0

Funktion des Restgliedes bei $n=3$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{n+1}(t)\,dt \quad \text{mit } x_0 = 0$$

also $R_3(x) = \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)\,dt$

also $R_3(0) = \frac{1}{3!}\int_0^0 (0-t)^3 f^{(4)}(t)\,dt = \underline{0}$