Aufgabe 2 (20 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x+y+1)^3 - 27xy$$

a(15) Zeigen Sie, dass als Kandidaten für lokale Extrema die Punkte $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ und (1,1) in Frage kommen. Bestimmen Sie nun das lokale Minimum/Maximum von f.

b(5) Bestimmen Sie die Tangentialabbildung g von f im Punkt (0,0) und berechnen Sie die Differenz zwischen der Funktion f und der Tangentialabbildung g in den Punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und (0,0)

$f_x(x,y) = 3(x+y+1)^2 \cdot 1 - 27y$

$f_y(x,y) = 3(x+y+1)^2 \cdot 1 - 27x$

$f_{xy}(x,y) = 6(x+y+1) - 27$

$f_{xx}(x,y) = 6(x+y+1)$

$f_{yy}(x,y) = 6(x+y+1)$

$\operatorname{grad} f \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rll} & 3(x+y+1)^2 - 27y = 0 & \text{I} \\ - & 3(x+y+1)^2 - 27x = 0 & \text{II} \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow 27x - 27y = 0 \Rightarrow x = y$

in I

$\Rightarrow 3(x+x+1)^2 - 27x = 3(2x+1)^2 - 27x$

$= 3 \cdot [4x^2 + 4x + 1] - 27x$

$= 12x^2 + 12x + 3 - 27x$

$= 12x^2 - 15x + 3 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$

$x_2 = 1/4 \quad y_2 = 1/4$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x+y+1) & 6(x+y+1)-27 \\ 6(x+y+1)-27 & 6(x+y+1) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 18-\lambda & -9 \\ -9 & 18-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 18^2 - 36\lambda - 81 \overset{!}{=} 0$

$(18-\lambda)(18-\lambda) - (-9)^2 \overset{!}{=} 0 \quad | : 9^2$

$= 9 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

Aufgabe 2 (20 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x + y + 1)^3 - 27xy$$

a(15) Zeigen Sie, dass als Kandidaten für lokale Extrema die Punkte $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ und (1,1) in Frage kommen. Bestimmen Sie nun das lokale Minimum/Maximum von f.

b(5) Bestimmen Sie die Tangentialabbildung g von f im Punkt (0,0) und berechnen Sie die Differenz zwischen der Funktion f und der Tangentialabbildung g in den Punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und (0,0)

$$f_x(x,y) = 3(x+y+1)^2 \cdot 1 - 27y$$
$$f_y(x,y) = 3(x+y+1)^2 \cdot 1 - 27x$$
$$f_{xy}(x,y) = 6(x+y+1) - 27$$
$$f_{xx}(x,y) = 6(x+y+1)$$
$$f_{yy}(x,y) = 6(x+y+1)$$

$$\operatorname{grad} f \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} 3(x+y+1)^2 - 27y = 0 & \text{I} \\ -\ 3(x+y+1)^2 - 27x = 0 & \text{II} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 27x - 27y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

in I

$$\Rightarrow \quad 3(x+x+1)^2 - 27x = 3(2x+1)^2 - 27x$$
$$= 3 \cdot [4x^2 + 4x + 1] - 27x$$
$$= 12x^2 + 12x + 3 - 27x$$
$$= 12x^2 - 15x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1$$
$$x_2 = 1/4 \qquad y_2 = 1/4$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x+y+1) & 6(x+y+1) - 27 \\ 6(x+y+1) - 27 & 6(x+y+1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 18-\lambda & -9 \\ -9 & 18-\lambda \end{pmatrix} = \begin{array}{l} (18-\lambda)(18-\lambda) - (-9)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad | :9^2 \\ \lambda^2 + 18^2 - 36\lambda - 81 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

$$= 9\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Platz für Berechnungen

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}\right\} \text{ beide größer Null}$$

$\Rightarrow P(1,1)$ ist Minimum

$$Hf(1/4, 1/4) = \begin{pmatrix} 6\cdot(1/4 + 1/4 + 1) & 6(1/4 + 1/4 + 1) - 27 \\ 6(1/4 + 1/4 + 1) - 27 & 6(1/4 + 1/4 + 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 9-27 \\ 9-27 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 9 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1 \Rightarrow$ indefinit

$\Rightarrow P(1/4, 1/4)$ ist Sattel

Tangential abb:

$$g(x,y) = f(0,0) + \frac{f_x(0,0)}{1!}(x-0) + \frac{f_y(0,0)}{1!}(y-0)$$

$$= 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot x + 3\cdot 1^2 \cdot y = 1 + 3x + 3y$$

$$(f-g)(-1/2, -1/2) = \left[(-1/2 - 1/2 + 1)^3 - 27\cdot 1/4\right] - \left[1 - 3/2 - 3/2\right] = -\frac{27}{4} - 1 + \frac{6}{2} = -\frac{27}{4} + 2 = \underline{\underline{-\frac{19}{4}}}$$

$$(f-g)(0,0) = 1^3 - 1 = \underline{\underline{0}}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte ohne Gewähr)

Ein Tank im Chemielabor enthalte 1000 l Wasser, in dem anfänglich 50 kg Salz gelöst sind. Pro Minute werden kontinuierlich 10 Liter Salzlösung entnommen und 10 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zugeführt. (Es wird vorrausgesetzt, dass die Salzverteilung im Tank stets homogen ist). Wieviel Salz befindet sich nach 1 Stunde im Tank?

neue Salzmenge/l = alte Salzmenge/l + Zuwachs/l − Abfluß/l

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \frac{2}{10}\cdot\Delta t - \frac{S(t)}{1000}\cdot \cancel{10}\cdot\Delta t$$

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = 0{,}2 - \frac{S(t)}{1000}$$ bzw absolut $$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = 2 - \frac{S(t)\cdot 10}{1000}$$

DGL: $S'(t) = 2 - 0{,}01\,S(t)$ $\qquad S(0) = 50$

$$\int \frac{1}{2-0{,}01S(t)}\,dS = \int 1\cdot dt$$

$$\ln(2-0{,}01S(t))\cdot(-100) = t + c$$

$$\ln(2-0{,}01S) = -0{,}01t + \hat{c}$$

$$2-0{,}01S = e^{-0{,}01t+\hat{c}} = e^{-0{,}01t}\cdot\hat{c}$$

$$-0{,}01S = \hat{c}\cdot e^{-0{,}01t} - 2$$

$$S(t) = 200 - \hat{\hat{c}}\,e^{-0{,}01t}$$

$$S(0) = 200 - \hat{\hat{c}}\cdot 1 \overset{!}{=} 50$$

$$\Rightarrow -\hat{\hat{c}} = -150$$

$$\hat{\hat{c}} = 150$$

$$\Rightarrow S(t) = 200 - 150\cdot e^{-0{,}01t}$$

$$S(60) = 200 - 150\cdot e^{-0{,}01\cdot 60} = 200 - 150\cdot e^{-0{,}6} = 117{,}67$$

Aufgabe 3 Ersatz(10 Punkte ohne Gewähr)

Falls es Ihnen nicht gelingt, eine entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, können Sie folgende Ersatzaufgabe lösen:

a(7) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:

$y'(x) = e^{x-y(x)-e^{y(x)}}$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

b(3) Überprüfen Sie Ihre gefundene Lösung durch eine Probe.

Bemerkung: Bearbeiten Sie nur eine Alternative (Für Aufgabe 3 gibt es nicht mehr als 15 Punkte ohne Gewähr)

$y'(x) = e^{x-y-e^y} = e^x \cdot e^{-y} \cdot e^{-e^y} = \dfrac{e^x}{e^y \cdot e^{e^y}}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} \cdot e^y \cdot e^{e^y} = e^x$

$\Rightarrow \int e^y e^{e^y} dy = \int e^x dx$

$e^{e^y} = e^x + c \quad \Rightarrow \ln e^{e^y} = e^y = \ln(e^x + c)$

$\left(e^{e^y}\right)' = e^{e^y} \cdot e^y$

$\Rightarrow y = \ln e^y = \ln(\ln(e^x + c))$

$y(0) = \ln(\ln(\cancel{e^1} + c)) \overset{!}{=} \cancel{0}$

$\Rightarrow \ln(\cancel{e^1} + c) = \cancel{0}$

$y = \ln(\ln(e^x + c)) \qquad y(1) = \ln(\ln(e^1 + c)) = 0$

$\Rightarrow e^{\ln(\ln e^1 + c} = e^0$

$\Rightarrow y(x) = \ln(\ln(e^x)) = \underline{\underline{\ln(x)}}$

$\ln(e^1 + c) = 1$

$\Rightarrow y(1) = \ln(1) = 0$ ✓

$y' = \dfrac{1}{x}$ ls. $\quad$ rs: $\dfrac{e^x}{e^{\ln x} \cdot e^{e^{\ln x}}} = \dfrac{e^x}{x \cdot e^x} = \dfrac{1}{x}$ ✓

$e^{\ln(e+c)} = e^1$

$e + c = e \Rightarrow c = 0$