Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ln(2x+3)$.

$2x+3 \overset{!}{=} \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2x = -\frac{3}{2}$

$x = -\frac{3}{4}$

a(5) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$

$f(x) = ln(2x+3)$

$f'(x) = 2\cdot(2x+3)^{-1}$

$f''(x) = -2\cdot 2(2x+3)^{-2}$

$f'''(x) = +222\cdot 2(2x+3)^{-3}$

$f''''(x) = -2^4\cdot 2\cdot 3(2x+3)^{-4}$

$f^{(5)}(x) = +2^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4(2x+3)^{-5}$

$f(-1) = ln(1) = 0$ 1

$f'(-1) = 2\cdot 1^{-1} = 2$ 1

$f''(-1) = -2^2$ 1

$f'''(-1) = 2^3\cdot 2!$ 1

$f''''(-1) = -2^4\cdot 3!$

$f^{5}(-1) = +2^5\cdot 4!$

$T_{f,-1}(x) = 0 + \frac{2}{1}(x+1) - \frac{2^2}{2!}\cdot(x+1)^2 + \frac{2^3\cdot 2!}{3!}(x+1)^3$ 1

b(5) Ermitteln Sie einen allgemeinen Ausdruck für $f^{(n)}(x)$. Beweisen Sie diesen Ausdruck mittels vollständiger Induktion und geben die TAYLOR REIHE von f im Entwicklungspunkt x_0 an

Beh: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot 2^n(n-1)!\cdot(2x+3)^{-n}$ 1

Anker: $n=1$ $f^{(1)}(x) = (-1)^2\cdot 2^2(2-1)!\cdot(2x+3)^{-1} = 2\cdot(2x+3)^{-1}$ ✓ 1

Schluß: $n \to n+1$

z.z: $\underline{f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}\cdot 2^{n+1}(n-1+1)!\,(2x+3)^{-(n+1)}}$ 1

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n+1}\cdot 2^n(n-1)!\left((2x+3)^{-n}\right)'$

$= (-1)^{n+1}\cdot 2^n(n-1)!\cdot(-n)(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2$

$= (-1)^{n+2}\cdot 2^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot n\,(2x+3)^{-(n+1)} = (-1)^{n+2}\cdot 2^{n+1}\cdot n!\,(2x+3)^{-(n+1)}$ 1

c(5) Zeigen Sie mit Hilfe von b), daß $ln(\frac{3}{2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n\cdot 2^n}$

$\Rightarrow T_{f,-1}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(x+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^n\frac{(n-1)!}{n!}\cdot 1\cdot(x+1)^n$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\cdot(x+1)^n}}$ 1

$\Rightarrow ln\left(\frac{3}{2}\right) = ln\left(2\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\cdot\left(-\frac{3}{4}+1\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n\cdot n}$

1 1 1 2

Aufgabe 2 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = xy^2 - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + y$$

a(4) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f

b(4) Berechnen Sie alle Extremwertkandidaten von f

c(4) Prüfen Sie für alle Extremwertkandidaten die **nicht** auf der x-Achse liegen ob es sich jeweils um ein Maximum oder ein Minimum oder ein Sattelpunkt handelt

d(3) Betrachten Sie nun den Schnitt der Funktion mit der Ebene x=2 und bestimmen Sie Extrempunkte unter dieser Nebenbedingung. Das heißt: Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion wenn eine Ortskurve beispielsweise vom Punkt (2,0) zum Punkt (2,4) durchlaufen wird.

a)
$$\text{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - 2xy \\ 2xy - x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$ 2

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x-2y \end{pmatrix} =$$ 2

b)
$y^2 - 2xy \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y_1 = 0 \;;\; y_2 = 2x$ in II $-x^2+1=0$

$\Rightarrow x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$y_2 = 2x$ in II $\Rightarrow 2\cdot 2x\cdot x - 4x^2 - x^2 + 1 = -x^2 + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$\Rightarrow P_1(1,0)$ 1 $\quad P_2(-1,0)$ 1
$P_3(1,2)$ 1 $\quad P_4(-1,-2)$ 1

nur P_3 und P_4 kommen in Frage

$$\text{Hess} f(1,2) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -(4+\lambda)\cdot(2+\lambda) - 4$$

$= 8 + 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 4$

$= \lambda^2 + 6\lambda + 4$

$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 4}}{2}$

$\lambda_1 = \frac{-6+\sqrt{20}}{2} < 0$

$\lambda_2 = \frac{-6-\sqrt{20}}{2} < 0$ 2

$\Rightarrow$ ~~ne.~~ def.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$$\text{Hess} f(-1,-2) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Pos. ~~neg.~~ Def 1

$\Rightarrow$ ~~Maximum~~ Min.

d)

$$f(2,y) = 2 \cdot y^2 - 4y - 1/3\, y^3 + y$$

$$= -1/3\, y^3 + 2y^2 - 3y$$

$$f'(2,y) = -y^2 + 4y - 3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow y_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

$$\Rightarrow y_1 = 3 \quad y_2 = 1$$

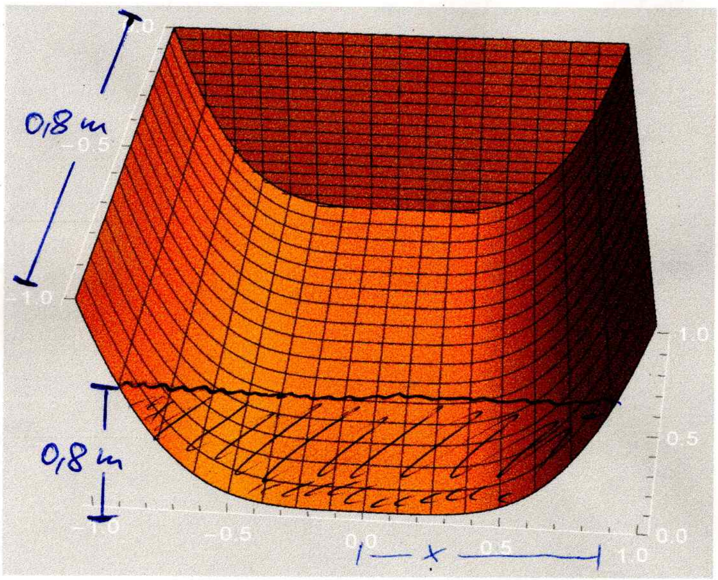
$$f''(2,y) = -2y + 4$$

$\Rightarrow f''(2,3) = -6 + 4 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad P(2,3)$ ist ~~Tief~~ Hoch punkt

$f''(2,1) = -2 + 4 = +2 > 0 \quad \Rightarrow \quad P(2,1)$ ist ~~Hoch~~ Tief punkt

Aufgabe 3 (15 Punkte ohne Gewähr)

Eine Badewanne der Breite 0,8m der Länge 2m und der Form f(x) = x^4 ist zu 0,8 m mit Wasser gefüllt. Der Abfluß befindet sich in der Mitte und hat einen Querschnitt von 0,0004 m^2.
Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 2 \cdot \sqrt{5y(t)}m/s$ (Gesetz von Torricelli)
wobei y(t) die aktuelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Auslass ist.



$y(t) = x^4(t)$

$\Rightarrow x = \sqrt[4]{y}$ 1

$\Rightarrow$ Länge $= 2x = 2 \cdot \sqrt[4]{y}$

Ausgangslänge $(t=0)$

$2 \cdot \sqrt[4]{0{,}8} = 2 \cdot 0{,}94 \ldots$

Wie lange dauert es bis die Wanne leer ist? Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

a(7) Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.

b(5) Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung aus Aufgabe 3a.

c(3) Nach welcher Zeit ist die Wanne leer?

Volumenabnahme Badew. $\equiv$ abgeflossenes Wasser 1P

(aktuelle Fläche) Pegeldifferenz = (Querschnitt)·(Fließgeschwindigkeit)· Zeit 1P

$0{,}8 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{y(t)} \cdot (y(t) - y(t+\Delta t)) = 0{,}0004 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{y(t)} \cdot \Delta t$ 1P

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{0{,}0004}{0{,}8} \cdot \sqrt{5} \cdot y_{(t)}^{1/2} \cdot y_{(t)}^{-1/4}$$ 1P

$$y'(t) = -\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot y^{1/4}(t)$$ 1P

$\Rightarrow y'(t) \cdot y^{-1/4} = -\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ mit $y(0) = 0{,}8$ 1P

$\Rightarrow \int y^{-1/4}\, dy = -\int \sqrt{125} \cdot 10^{-4}\, dt$ 1P

$\Rightarrow \frac{4}{3} y^{3/4} = -\sqrt{125} \cdot 10^{-4} t + C$ 1P $\Rightarrow y^{3/4} = -\frac{3\sqrt{125}}{4} \cdot 10^{-4} \cdot t + \bar{C}$ 1P

$\Rightarrow y(t) = \left(\bar{C} - \frac{3}{4}\sqrt{125} \cdot 10^{-4} t\right)^{4/3}$ 1P $\quad y(0) = (\bar{C} - 0)^{4/3} = 0{,}8$

$\Rightarrow \bar{C} = (0{,}8)^{3/4} = 0{,}8^{0{,}75} = 0{,}84589$ 1P

Platz für Berechnungen

$$\Rightarrow y(t) = \left(0{,}84598 - \frac{3}{4}\cdot\sqrt{125}\cdot 10^{-4}t\right)^{4/3} \overset{!}{=} 0$$ (1P)

$$\Rightarrow 0{,}84598 = \frac{3}{4}\sqrt{125}\cdot 10^{-4}\cdot t$$ (1P)

$$\Rightarrow t = 0{,}84598\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}\cdot 10^{4} = 1008\,s$$

$$\hat{=}\ 16{,}8\ \text{min}$$ (1P)

Aufgabe 3 Ersatz(10 Punkte ohne Gewähr)

Falls es Ihnen nicht gelingt, eine entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, können Sie folgende Ersatzaufgabe lösen:

a(7) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:
(Tipp: ggf. müssen Sie zweimal eine Substitution durchführen)

$$y'(x) = \frac{2y}{x} + x \qquad \text{mit der Anfangsbedingung} \qquad y(1) = 1\,.$$

b(3) Überprüfen Sie Ihre gefundene Lösung durch eine Probe.

Bemerkung: Bearbeiten Sie nur eine Alternative (Für Aufgabe 3 gibt es nicht mehr als 15 Punkte ohne Gewähr)

$y' = \frac{2y}{x} + x$ Sub: $z = \frac{2y}{x} \Rightarrow zx = 2y$ 1P

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} z x$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} z' \cdot x + \frac{1}{2} z$ 1P

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} z' \cdot x + \frac{1}{2} z = z + x$

$\Rightarrow z' \cdot x + z = 2z + 2x$

$z' \cdot x = z + 2x$

$z' = \frac{z}{x} + 2$ 1P Sub: $u = \frac{z}{x} \Rightarrow ux = z$

$\Rightarrow z' = u'x + u$ 1P

$\Rightarrow z' = u'x + u = u + 2$

$\Rightarrow u'x = 2$

$u' = 2 \cdot \frac{1}{x}$ 1P

$\Rightarrow \int du = 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx$

$u = 2 \cdot \ln(x) + c = 2 \cdot [\ln(x) + \ln \bar{c}] = 2(\ln \bar{c} \cdot x)$

$\Rightarrow z = u \cdot x = 2(\ln \bar{c} x) \cdot x$ 1P

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} z x = \frac{1}{2} \cdot 2(\ln \bar{c} x) \cdot x \cdot x = x^2 \cdot \ln(\bar{c} x)$

$y(1) = 1^2 \cdot \ln \bar{c} \cdot 1 \stackrel{!}{=} 1$ 1P

$\Rightarrow \bar{c} = e \qquad \Rightarrow y(x) = x^2 \cdot \ln(e \cdot x)$ 1P

Probe:

ls: $y' = 2x \cdot \ln(ex) + x^2 \cdot \frac{1}{e \cdot x} \cdot e = 2x \ln(ex) + x$ 1P

rs: $\frac{2y}{x} + x = \frac{2 \cdot x^2 \ln(ex)}{x} + x = 2x \ln(ex) + x$ ✓ 1P