Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Zeigen Sie unter Verwendung der Taylorreihenentwicklung, dass wenn |x| genügend klein ist, gilt $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. Berechnen Sie dazu

a(5) die ersten fünf Ableitung der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$f'(x) = -(1+x)^{-2}$ $\quad f'(0) = -1$

$f''(x) = 2(1+x)^{-3}$ $\quad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$ $\quad f'''(0) = -2\cdot 3$

$f^{(4)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4(1+x)^{-5}$ $\quad f^{(4)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4$

$f^{(5)}(x) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(1+x)^{-6}$ $\quad f^{(5)}(0) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$

b(5) Bestimmen Sie die n-te Ableitung der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x}$ und beweisen Sie Ihre Behauptung

Beh.: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$ 1P

Anker: $n=1$ $\quad f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot 1!\ (1+x)^{-(1+1)} = -(1+x)^{-2}$ ✓ 1P

Schluß: $n \Rightarrow n+1$ $\quad$ z.z.: $\underline{f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^{-(n+2)}}$ 1P

$f^{(n+1)}(x)$ 1P $= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[(-1)^n \cdot (n)!\ (1+x)^{-(n+1)}\right]' = (-1)^n \cdot (-1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (1+x)^{-(n+2)}$

1P $= (-1)^{n+1} \cdot (n+1)!\ (1+x)^{-(n+2)}$

c(5) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie damit die Behauptung $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ (für |x| genügend klein)

$T_{f,0}(x)$ 1P $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n$

1P $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!\ (1+0)^{-(n+1)}}{n!} x^n$

1P $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + \underbrace{x^2 - x^3 + \ldots}_{\text{zu vernachlässigen}}$

$\Rightarrow$ für $|x| \ll 1$ gilt $|x| \gg |x^2|$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = T_{f,0}(x) \approx 1 - x$ 2P