$f(x,1) = 1 - 2x - x^2 + 1$

Aufgabe 2 (15 Punkte, ohne Gewähr)

$f(0,y) = 1 \Rightarrow$ kein Extremwert Y-Achse

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := xy^2 - 2xy - x^2 + 1$$

a(5) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion bis zum Grad 2

$f_x(x,y) = y^2 - 2y - 2x$

$f_y(x,y) = 2xy - 2x$

$f_{xx}(x,y) = -2$

$f_{yy}(x,y) = 2x$

$f_{xy}(x,y) = 2y - 2$

b(5) Bestimmen Sie **alle** möglichen Kandidaten für Extremwerte.

$\operatorname{grad} f(x,y) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} y^2 - 2y - 2x \overset{!}{=} 0 & \mathrm{I} \\ 2xy - 2x \overset{!}{=} 0 & \mathrm{II} \end{array}$

$\Rightarrow x_1 = 0$, in I $\Rightarrow y^2 - 2y = 0$

$y_1 = 0$ $\Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = 0$ $\Rightarrow y - 2 = 0$

$y_2 = 0$ $y = 2$

Teile II durch x

$\Rightarrow 2y - 2 = 0 \Rightarrow y_3 = 1$

in I $\Rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 - 2x = 0 \Rightarrow -1 - 2x = 0$

$2x = -1$

$\Rightarrow x_3 = -1/2$

c(5) Mögliche Kandidaten sind $P_1(0/0)$, $P_2(0/2)$ und $P_3(-\frac{1}{2}/1)$ Bestimmen Sie, ob die Kandidaten lokale Minima oder lokale Maxima oder Sattelpunkte sind.

$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Charakt. Polynom: $(-2-\lambda)(-\lambda) - 4$

$= \lambda^2 + 2\lambda - 4 \overset{!}{=} 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 4}}{2} = -1 \pm 1/2\sqrt{\underset{4,2}{20}}$

$\operatorname{Hess} f(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right\}$ semi definit

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array}\right\}$ Sattel

$\operatorname{Hess} f(-1/2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ >0 >0 Hurwitz positiv def

$-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ negativ definit $\Rightarrow$ Max