Aufgabe 3 (20 Punkte ohne Gewähr)

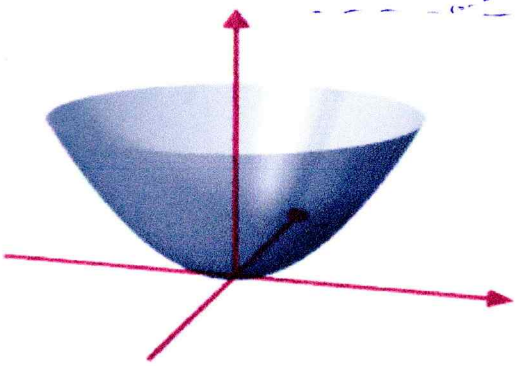
Gegeben sei ein Gefäß in Form eines Drehkörpers. In der vorliegenden Aufgabe entsteht der Drehkörper in dem man die Funktion der Form $y = (\sqrt{x})^3$ um die y-Achse rotieren läßt. Das Gefäß ist ~~20~~ 8 cm hoch mit Wasser gefüllt. Am Boden ist eine kreisrunde Öffnung mit Durchmesser 2 cm, die mit einem Schieber verschlossen ist. Wie lange dauert es bis das Gefäß leer ist, wenn der Schieber geöffnet wird?

Skizze:

$r = y^{2/3}$

$y = x^{3/2} \Leftrightarrow x = y^{2/3}$

$y(t) = x^{3/2}(t) \hat{=} r^{3/2}(t)$



Für die Berechnungen liegt folgendes Modell zugrunde:
Der Flüssigkeitsspiegel hat die Form eines Kreises.
Am Anfang hat der Flüssigkeitsspiegel die Höhe H = ~~20~~ 8 cm.
Abfussgeschwindigkeit: $v(t) = 20 \cdot \sqrt{5y(t)} cm/s$ (Gesetz von Torricelli)
wobei y(t) die aktuelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Auslass ist.

wie groß ist Radius der Wasseroberfläche am Anfang

~~a~~ b (10) Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.

~~b~~ c (5) Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung aus Aufgabe 3~~a~~b.

~~c~~ d (5) Nach welcher Zeit ist der Behälter leer?

$y(0) = H = 8 = r^{3/2}(0) \Rightarrow r^{3/2}(0) = 8$

$r(0) = 8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

<u>Volumenabnahme an der Wasseroberfläche:</u>

$\pi r^2(t) \cdot [y(t) - y(t+\Delta t)] = \pi \cdot (y^{2/3}(t))^2 \cdot [y(t) - y(t+\Delta t)]$

<u>Volumenabnahme am Abfluß:</u>

$v(t) \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \Delta t = \pi\, 20 \cdot \sqrt{5} \cdot y^{1/2}(t) \cdot \Delta t$

$\Rightarrow \pi\, y^{4/3}(t) \cdot [y(t) - y(t+\Delta t)] = \pi\, 20\sqrt{5} \cdot y^{1/2}(t) \cdot \Delta t$

$\Rightarrow y' = \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -20 \cdot \sqrt{5} \cdot y^{1/2} \cdot y^{-4/3} = -20\sqrt{5}\, y^{-\frac{5}{6}}$