Aufgabe 2 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := x^2 + y^4 - y^2$$

a(4) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion bis zum Grad 2

$f_x(x,y) = 2x$

$f_y(x,y) = 4y^3 - 2y$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{xx}(x,y) = 2$

$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 2$

b(5) Bestimmen Sie **alle** möglichen Kandidaten für Extremwerte.

$\operatorname{grad} f(x,y) \stackrel{!}{=} 0 \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 - 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y(2y^2-1) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad y_1 = 0$

$x_2 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_3 = 0 \quad y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2y^2 - 1 = 0$

$2y^2 = 1$

$y^2 = 1/2$

$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c(6) Mögliche Kandidaten sind $P_1(0/0), P_2(0/\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_3(0/-\frac{1}{\sqrt{2}})$
Bestimmen Sie, ob die Kandidaten lokale Minima oder lokale Maxima oder Sattelpunkte oder keine der Möglichkeiten sind.

$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ charakterist. Polynom: $(2-\lambda)(-2-\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}\right\}$ Sattelp

$\operatorname{Hess} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{12}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ Hurwitz: $\left.\begin{matrix} 2 > 0 \\ 2 \cdot 4 - 0 = 8 > 0 \end{matrix}\right\}$ positiv definit $\Rightarrow$ Min.

$\operatorname{Hess} f(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow$ Min