Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

a(10) Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(x_0/y_0) = (1/-1)$ bis zum Grad 2.

$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$; $f(1,-1) = e^{1^2-(1)^2} = e^0 = 1$

$f_x(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot 2x$; $f_x(1,-1) = e^0\cdot 2\cdot 1 = 2$

$f_y(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)$; $f_y(1,-1) = e^0\cdot(-2\cdot -1) = 2$

$f_{xy}(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)\cdot(2x)$ $f_{xy}(1-1) = e^0\cdot(-2\cdot -1)\cdot 2\cdot 1 = 1\cdot 2\cdot 2 = 4$

$f_{yy}(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)\cdot(-2y) + e^{x^2-y^2}\cdot(-2)$ $f_{yy}(1,-1) = e^0\cdot 4(-1)^2 + e^0(-2$ $= 4 - 2 = 2$

$f_{xx}(x,y) = e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2x + e^{x^2-y^2}\cdot 2$ $f_{xx}(1,-1) = e^0 4 + e^0\cdot 2 = 4+2 = 6$

$$T_{f,(1/-1)}(x,y) = f(1,-1) + \operatorname{grad} f(1,-1)\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y+1)\,\operatorname{Hess} f(1,-1)\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$$

$$= 1 + (2,2)\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[(x-1\ y+1)\begin{pmatrix}6 & 4\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}6x+4y-2\\4x+2y-2\end{pmatrix}$$

$$= 1 + 2x - 2 + 2y + 2 + \frac{1}{2}\left[(x-1, y+1)\cdot\begin{pmatrix}6x-6+4y+4\\4x-4+2y+2\end{pmatrix}\right]$$

$$= \underbrace{1+2x+2y}_{\text{Tangentialebene}} + \frac{1}{2}\left[6x^2 + 4xy - 2x - 6x - 4y + 2 + 4xy + 2y^2 - 2y + 4x + 2y - 2\right]$$

b(5) Wo schneidet die Tangentialebene (die durch den Entwicklungspunkt $P(x_0/y_0)$ geht) die x-y-Ebene?

$$= 1 + 2x + 2y + \frac{1}{2}\left[6x^2 + 2y^2 + 8xy - 4x - 4y\right]$$

$$= 1 + 2x + 2y + 3x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 2y = \underline{\underline{1 + 3x^2 + y^2 + 4xy}}$$

Tangentialebene $\hat{=}$ Taylor bis Grad 1

$\Rightarrow T^1_{f(1/-1)}(x,y) = 1 + 2x + 2y \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 2x + 2y = -1$

$2y = -1 - 2x$

$\underline{\underline{y = -1/2 - x}}$