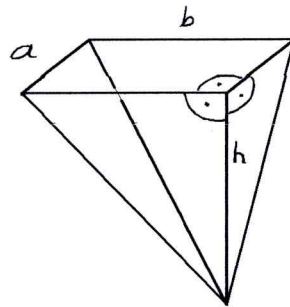


### Aufgabe 3 (20 Punkte ohne Gewähr)

Gegeben seien drei mit Wasser gefüllten Gefäße in Form von umgekehrten Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche. Dabei ist die Länge  $b$  des Rechteck doppelt so groß wie die Breite  $a$  und die Höhe  $h$  der Pyramide dreimal so groß wie die Breite  $a$ .

An der Spitze ist ein Auslaß mit einer Fläche von  $1 \text{ cm}^2$ . Die Höhen der Pyramiden betragen  $30 \text{ cm}$  bzw.  $90 \text{ cm}$  bzw.  $120 \text{ cm}$ . An den Spitzen sind jeweils die Öffnungen mit einem Schieber verschlossen. Wie lange dauert es bis die Pyramiden jeweils leer sind, wenn der jeweilige Schieber geöffnet wird?



Für die Berechnungen liegt folgendes Modell zugrunde:

Der Flüssigkeitsspiegel hat die Form eines Rechtecks.

Am Anfang hat der Flüssigkeitsspiegel jeweils die Höhe  $h = 30 \text{ cm}$  bzw.  $h = 90 \text{ cm}$  bzw.  $h = 120 \text{ cm}$ .

Abflussgeschwindigkeit:  $v(t) = 20 \cdot \sqrt{5y(t)} \text{ cm/s}$  (Gesetz von Torricelli)

wobei  $y(t)$  die aktuelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Auslass ist.

- a(1) Wie groß ist die Fläche des Wasserspiegel jeweils am Anfang?
- b(10) Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.
- c(6) Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung aus Aufgabe 3b.
- d(3) Nach welcher Zeit sind die Behälter jeweils leer?

$$h_1 = 30 \text{ cm} \Rightarrow a_1 = 10 \text{ cm} \Rightarrow b_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow A_{1,0} = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2$$

$$h_2 = 90 \text{ cm} \Rightarrow a_2 = 30 \text{ cm} \Rightarrow b_2 = 60 \text{ cm} \Rightarrow A_{2,0} = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ cm}^2$$

$$h_3 = 120 \text{ cm} \Rightarrow a_3 = 40 \text{ cm} \Rightarrow b_3 = 80 \text{ cm} \Rightarrow A_{3,0} = 40 \cdot 80 = 3200 \text{ cm}^2$$