Klausur Mathematik II (Analysis)

Semester:	AI2 Bachelor **Sommersemester 20**, 24.07.20
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Hilfsmittel:	alle, außer programmierbare Taschenrechner und Computer
Punkteverteilung:	angegebene Zahlen sind Richtwerte (ohne Gewähr)

Event:.....3608 Kennziffer:3811/33808

Lösen Sie die Aufgaben soweit möglich auf dem Aufgabenblatt

Aufgabenblatt bitte nicht vor Beginn der Klausur umdrehen

Name:.......................................

MatrikelNr:..............................

Aufgabe	1	2	3	3 Ers.	Sum
Punkte					

Aufgabe 1 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Zeigen Sie unter Verwendung der Taylorreihenentwicklung, dass wenn |x| genügend klein ist, gilt $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. Berechnen Sie dazu

a(5) die ersten fünf Ableitung der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x}$

b(5) Bestimmen Sie die n-te Ableitung der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x}$ und beweisen Sie Ihre Behauptung

c(5) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion f(x) $= \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie damit die Behauptung $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ (für |x| genügend klein)

Aufgabe 2 (15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := xy^2 - 2xy - x^2 + 1$$

a(4) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion bis zum Grad 2

b(5) Bestimmen Sie **alle** möglichen Kandidaten für Extremwerte.

c(6) Mögliche Kandidaten sind $P_1(0/0), P_2(0/1)$ und $P_3(-\frac{1}{2}/1)$ Bestimmen Sie, ob die Kandidaten lokale Minima oder lokale Maxima oder Sattelpunkte oder keine der Möglichkeiten sind.

Aufgabe 3 (20 Punkte ohne Gewähr)

Gegeben sei ein Gefäß in Form eines Drehkörpers. In der vorliegenden Aufgabe entsteht der Drehkörper in dem man die Funktion der Form $y = (\sqrt{x})^3$ um die y-Achse rotieren läßt. Das Gefäß ist 8 cm hoch mit Wasser gefüllt. Am Boden ist eine kreisrunde Öffnung mit Durchmesser 2 cm, die mit einem Schieber verschlossen ist. Wie lange dauert es bis das Gefäß leer ist, wenn der Schieber geöffnet wird?

Für die Berechnungen liegt folgendes Modell zugrunde:
Der Flüssigkeitsspiegel hat die Form eines Kreises.
Am Anfang hat der Flüssigkeitsspiegel die Höhe H = 8 cm.
Abfussgeschwindigkeit: v(t) = $20 \cdot \sqrt{5y(t)} cm/s$ (Gesetz von Torricelli)
wobei y(t) die aktuelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Auslass ist.

a(2) Wie groß ist der Radius des Wasserspiegel am Anfang?

b(10) Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.

c(5) Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung aus Aufgabe 3b.

d(3) Nach welcher Zeit ist der Behälter leer?

Platz für Berechnungen

Aufgabe 3 Ersatz(10 Punkte ohne Gewähr)

Falls es Ihnen nicht gelingt, eine entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, können Sie folgende Ersatzaufgabe lösen:

a(7) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:

$y'(x) = e^{y(x)} \cdot sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $\mathrm{y}(0) = 0$.

b(3) Überprüfen Sie Ihre gefundene Lösung durch eine Probe.

Bemerkung: Bearbeiten Sie nur eine Alternative (Für Aufgabe 3 gibt es nicht mehr als 20 Punkte ohne Gewähr)