Eine Linearkombination von **homogenen** Lösungen ist wieder eine (**homogene**) Lösung:

y und z seien **homogene** Lösungen, d.h. $A_*y = 0$ und $A_*z = 0$.
Dann gilt: $A_*(y + z) = A_*y + A_*z = 0 + 0 = 0$, d.h. y + z ist auch eine **homogene** Lösung, d.h. die Summe ist wieder eine homogene Lösung
x sei eine **homogene** Lösung, d.h. $A_*x = 0$.
Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $A_*(\alpha_*x) = \alpha_*A_*x = \alpha_*0 = 0$, d.h. auch ein Vielfaches von x ist eine Lösung

Bei **inhomogenen** LGS gilt das **nicht**:
y und z seien zwei inhomogene Lösungen, d.h. $A_*y = b$ und $A_*z = b$, $b \neq 0$.
$A_*(y + z) = A_*y + A_*z = b + b = 2b \neq b$, d.h. y + z ist **keine** **inhomogene** Lösung
x sei eine inhomogene Lösung, d.h. $A_*x = b$.
Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, dann ist $A_*(\alpha_*x) = \alpha_*A_*x = \alpha_*b \neq b$, d. h. ein Vielfaches von b ist **keine** inhomogene Lösung

Ergebnis:
Inhomogene Lösungen dürfen weder addiert noch mit einer Konstanten multipliziert werden.

Ist aber y eine **inhomogene** Lösung und y_1, y_2, y_3, … y_k **homogene** Lösungen, so ist

$A_*x = A_*(y + \alpha_{1*}y_1 + \alpha_{2*}y_2 + \alpha_{3*}y_3 + \ldots + \alpha_{k*}y_k) = A_*y + \alpha_{1*}A_*y_1 + \alpha_{2*}A_*y_2 + \alpha_{3*}A_*y_3 + \ldots + \alpha_{k*}A_*y_k = b + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = b$ wieder eine **inhomogene** Lösung.

Fazit:

Gesamtlösung eines **homogenen** LGS ist eine Linearkombination von **n – r linear unabhängigen homogenen** Lösungen.

Gesamtlösung eines **inhomogenen** LGS ist die Summe aus **einer inhomogenen** Lösung und der **Gesamtlösung des zugehörigen homogenen** LGS.

Beispiele zu Linearen Gleichungssystemen mit Lösungen:

(1)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 24$$

$$3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 39$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 9 & 39 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \text{I} * (-3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$r(A) = r\,(A,b) = 3 = r,\ \ n = 3 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 0$

(keine frei wählbare Variable = kein Parameter,
Lösung ist eindeutig)

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 39 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 8 & 39 \end{array}\right) \quad \mathrm{I} * (-2) \quad \mathrm{I} * (-3) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 9 \end{array}\right) \quad \mathrm{I} * (-2) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

„Stufenform“

$r(A) = 2 \neq r(A,b) = 3 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{L} = \emptyset)$, keine Lösung

(3)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 24$$
$$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 38$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 24 \\ 3 & 5 & 8 & 38 \end{array}\right) \quad \text{I} \cdot (-2) \quad \text{I} \cdot (-3) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \quad \text{I} \cdot (-2) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

inh.: $x_1 = 6$, hom.: $x_1 = -1$
inh.: $x_2 = 4$, hom.: $x_2 = -1$
inh.: $x_3 = 0$, hom.: $x_3 = 1$

$r(A) = r(A, b) = 2 = r, \quad n = 3 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 1$

(eine frei wählbare Variable = eine linear unabhängige homogene Lösung = ein Parameter, mehrdeutige Lösung: ∞-viele Lösungen)

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

andere Darstellungsmöglichkeit:

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(4)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 38 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 24 \\ 3 & 5 & 8 & 2 & 38 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-2) \quad \mid \cdot (-3) \\ \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-2) \qquad \Leftrightarrow \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{„Stufenform“}$$

$r(A) = r(A, b) = 2 = r, \quad n = 4 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 2$

(zwei frei wählbare Variable = zwei linear unabhängige homogene Lösungen = zwei Parameter, mehrdeutige Lösung: ∞-viele Lösungen)

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(5)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &= 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 38 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 24 \\ 3 & 5 & 8 & 2 & 3 & 38 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \text{I} * (-3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 6 & 8 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{„Stufenform“}$$

$r(A) = r(A, b) = 2 = r, \quad n = 5 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 3$

(drei frei wählbare Variable = drei linear unabhängige homogene Lösungen = drei Parameter, mehrdeutige Lösung: ∞-viele Lösungen)

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

(6)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 24$$
$$3x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 39$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 24 \\ 3 & 5 & 9 & 2 & 3 & 39 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \text{I} * (-3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 6 & 9 \end{array}\right) \quad \text{I} * (-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{„Stufenform“}$$

$r(A) = r(A, b) = 3 = r, \quad n = 5 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 2$

(zwei frei wählbare Variable = zwei linear unabhängige homogene Lösungen = zwei Parameter, mehrdeutige Lösung: ∞-viele Lösungen)

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(7)

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 - \quad x_5 &= 10\\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + \quad x_5 &= 24\\
3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 39
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10\\
2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 24\\
3 & 5 & 8 & 2 & 4 & 39
\end{array}\right)
\quad \text{I} * (-2) \quad \text{I} * (-3) \quad \Leftrightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10\\
0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4\\
0 & 2 & 2 & -4 & 7 & 9
\end{array}\right)
\quad \text{I} * (-2) \quad \Leftrightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 10\\
0 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
\quad \text{„irreguläre Stufenform“}
$$

$r(A) = r(A, b) = 3 = r, \quad n = 5 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 2$

(zwei frei wählbare Variable = zwei linear unabhängige

homogene Lösungen = zwei Parameter, mehrdeutige Lösung:

∞-viele Lösungen)

$$
x = \begin{pmatrix} 10\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}
$$

Weitere Beispiele:

(8) $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0$

$5x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{ll} \text{I}*(-2) & \text{I}*(-5) \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{I}*(-2) \\ + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{I}: (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 4$, $r = 3$, also ist $n - r = 1$

$$x = \alpha * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

(9) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{I}\cdot(-2)\ \mathrm{I}\cdot 1 \\ \quad + \\ \qquad\quad + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\cdot(-1) \\ \quad + \end{array} \qquad \text{kürzen : 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -8 \end{pmatrix}$$

n = 4, r = 3 , also n – r = 1

$$x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

(10) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 22$

$- x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 22 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} | * (-2) \quad | * 1 \\ + \\ \qquad\qquad + \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \quad | * (-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -3 & 11 \end{array}\right) \quad \text{„Stufenform“}$$

$r(A) = r(A, b) = 3 = r, \quad n = 5 \quad \Longrightarrow \quad n - r = 2$

$$x = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 13 \\ -11/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$