Hochschule Ravensburg-Weingarten **21.01.2021**
Gesundheitsökonomie – 1. Semester
Lösungen zu den Übungsaufgaben Mathematik

Aufgabe 12:

Ein inhomogenes LGS hat nach Umformen folgendes Aussehen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & c & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & c^2-1 & 0 & 1-c \end{array}\right)$$

a) Für welche(n) Wert(e) von $c \in \mathbb{R}$ ist das LGS unlösbar?!

Die ersten beiden Zeilen sind – unabhängig von c – keine Nullzeilen.
Die 3. Zeile wird zur Nullzeile in A $\Leftrightarrow$ $c^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = \pm 1$
Damit sie auch eine Nullzeile in (A, b) ist, muss $c = 1$ gelten.
Ist $c = \pm 1$, aber nicht 1, dann ist sie in (A, b) keine Nullzeile.
Also ist sie für $c = -1$ keine Nullzeile in (A, b) und damit ist $r(A) = 2 \neq 3 = r(A, b)$.

Fazit: für c= - 1 ist das LGS nicht lösbar.

b) Lösen Sie das LGS für c = 0 und für c = 1!

für c = 0: $n = 4, r(A) = r(A, b) = 3 = r \quad \Rightarrow n - r = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 + 6 = 10$, also $x_1 = 4$

$x_2 - 1 + 0 = 5$, also $x_2 = 6$

$x_4 = 0$, $-x_3 = 1$, also $x_3 = -1$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$x_1 - 3 + 1 = 0$, also $x_1 = 2$
$x_2 + 0 + 3 = 0$, also $x_2 = -3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

für c = 1: $n = 4, r(A) = r(A, b) = 2 = r \quad \Rightarrow n - r = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 13:

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem hat nach Umformen folgende Form:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & z & 2 & 5 & 4 & 20z \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -4 & 24 \\ 0 & 0 & z(z^2-4) & 0 & 0 & 3z^2 \end{array}\right)$$

Berechnen Sie die Lösung für z = 0 und für z = 1!

$z = 0$: $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -4 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma * \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$z = 1$: $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -4 & 24 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 27 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 14:

Lösen Sie das folgende inhomogene LGS in Abhängigkeit von α ∈ R:

$$\alpha^2 x_1 + (2\alpha^2 - 4)x_2 + (2\alpha^2 + 1)x_3 = \alpha - 10$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = -6$$

$$\alpha^2 x_1 + (2\alpha^2 + 1)x_2 + 2\alpha^2 x_3 = \alpha + 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha^2 & 2\alpha^2 - 4 & 2\alpha^2 + 1 & \alpha - 10 \\ 2 & 1 & 5 & -6 \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 + 1 & 2\alpha^2 & \alpha + 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} |*(-2) \qquad\qquad |*(-1) \\ |*\alpha^2, \alpha \neq 0 \quad + \\ \qquad\qquad\qquad + \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha^2 & 2\alpha^2 - 4 & 2\alpha^2 + 1 & & \alpha - 10 \\ 0 & 8 - 3\alpha^2 & \alpha^2 - 2 & & 14 - 2\alpha^2 \\ 0 & 5 & -1 & & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid * 5 \\ \mid * (3\alpha^2 - 8),\ \alpha^2 \neq \frac{8}{3} \quad + \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\# \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha^2 & 2\alpha^2 - 4 & 2\alpha^2 + 1 & & \alpha - 10 \\ 0 & 8 - 3\alpha^2 & \alpha^2 - 2 & & 14 - 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 - 2 & & 26\alpha^2 - 26 \end{array}\right) \# \begin{array}{l} \\ \\ \mid : 2(\alpha^2 - 1),\ \alpha \neq \pm 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha^2 & 2\alpha^2 - 4 & 2\alpha^2 + 1 & & \alpha - 10 \\ 0 & 8 - 3\alpha^2 & \alpha^2 - 2 & & 14 - 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & & 13 \end{array}\right)$$

Lösung für $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm 1, \alpha^2 \neq \frac{8}{3}$: $x_3 = 13$, $(8 - 3\alpha^2) * x_2 + (\alpha^2 - 2) * 13 = 14 - 2\alpha^2 \quad \Leftrightarrow$

$(8 - 3\alpha^2) * x_2 = 40 - 15\alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{40 - 15\alpha^2}{8 - 3\alpha^2} = \frac{5 * (8 - 3\alpha^2)}{8 - 3\alpha^2} = 5$,

$\alpha^2 x_1 + (2\alpha^2 - 4) * 5 + (2\alpha^2 + 1) * 13 = \alpha - 10 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 x_1 = -3 + \alpha \quad 36\alpha^2 \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha - 36\alpha^2 - 3}{\alpha^2}$

$\alpha = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

3. Zeile: $x_2 = 2$ 2. Zeile: $x_3 = -2$ 1. Zeile: $x_1 = \frac{3}{2}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$: Einsetzen in Matrix #

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = -1$: Einsetzen in Matrix #

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha^2 = \frac{8}{3} \iff \alpha = \pm\frac{2}{3} * \sqrt{6}$

$\alpha = \frac{2}{3} * \sqrt{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{19}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{6} - 10 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{19}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{6} - 10 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{277}{8} \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = -\frac{2}{3} * \sqrt{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{6} - 10 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{6} - 10 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{277}{8} \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Aufgabe 15:</u>

Bestimmen Sie die die Lösung des folgenden LGS für $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$a = -2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{keine Lösung}$$

$$a = 1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$a \neq -2, a \neq 1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \end{array}\right) \qquad x = \frac{1}{2+a} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hochschule Ravensburg-Weingarten **21.01.2021**
Gesundheitsökonomie – 1. Semester
Lösungen zu den Übungsaufgaben Mathematik

Aufgabe 16:
Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus die folgenden linearen Optimierungsaufgaben!

a)
$$\begin{aligned} \max\ z &= 10x_1 + 14x_2 + 9x_3 \\ \text{NB:}\quad 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq 16 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 17 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

s_1	3	5	2	1	0	16	8	
s_2	1	2	**3**	0	1	17	$\frac{17}{3}$	←
z	– 10	– 14	– 9	0	0	0		
			↑					

x_3	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	2	←
s_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$	17	
z	– 7	– 8	0	0	3	51		
	↑							

x_3	1	$\frac{11}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	2
x_1	0	$-\frac{11}{3}$	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	5
z	0	3	0	3	1	65

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z^* = 65$$

b) $\max\ z = 11x_1 + 16x_2 + 17x_3 + 10x_4 + 15x_5$

NB:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &\le 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

s_1	2	3	1	1	1	1	0	0	11	
s_2	1	1	1	1	1	0	1	0	12	
s_3	1	2	2	**1**	2	0	0	1	9	←
z	- 11	- 16	- 17	- 10	- 15	0	0	0	0	
				↑						

s_1	**1**	1	- 1	0	- 1	1	0	- 1	2	←
s_2	0	- 1	- 1	0	- 1	0	1	- 1	3	
x_4	1	2	2	1	2	0	0	1	9	
z	- 1	4	3	0	5	0	0	10	90	
	↑									

x_1	1	1	- 1	0	- 1	1	0	- 1	2
s_2	0	- 1	- 1	0	- 1	0	1	- 1	3
x_4	0	1	3	1	3	- 1	0	2	7
z	0	5	2	0	4	1	0	9	92

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad z^* = 92$$

Aufgabe 17:

Das Simplex-Tableau einer linearen Maximierungsaufgabe hat nach einigen Iterationen folgendes Aussehen:

x_5	0	0	1	– 1	1	2	– 1	0	1
x_1	1	1	0	2	0	– 1	1	0	5
s_3	0	1	– 1	3	0	– 2	0	1	6
z	0	1	13	– 18	0	16	5	0	151

a) Geben Sie die Basislösungen x, y, s und t sowie den Zielfunktionswert z an!

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 13 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z = 151$$

b) Wie ändert sich z, wenn $x_3 = 1$ wird?

z wird um 13 kleiner ($z_{neu} = z_{alt} - 13x_3 = 151 - 13 = 138$)

c) Berechnen Sie die optimalen Lösungen x* und y* sowie das maximale z*!

				z							
x_5	0	0	1	– 1	1	2	– 1	0	1	*	
x_1	1	1	0	2	0	– 1	1	0	5	2,5	
s_3	0	1	– 1	**3**	0	– 2	0	1	6	2	←
z	0	1	13	– 18	0	16	5	0	151		
				↑							

x_5	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	– 1	$\frac{1}{3}$	3
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_4	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2
z	0	7	7	0	0	4	5	6	187

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad s^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z^* = 187$$

Aufgabe 18:
Für eine lineare Optimierungsaufgabe ergibt sich nach zwei Iterationen das folgende Tableau:

$$
\begin{array}{c|cccc|ccc||c|}
\hline
x_4 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 8 \\
s_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\
x_1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
z & 0 & -6 & 20 & 0 & -10 & 0 & 15 & 280 \\
\hline
\end{array}
$$

a) Geben Sie x und z für die aktuelle Basislösung an!

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad z = 280$$

b) Woran können Sie erkennen, dass diese Basislösung (noch) nicht optimal ist?

In der z-Zeile sind noch negative Koeffizienten.

c) Verbessern Sie diese Lösung, indem Sie x_2 als neue Basisvariable wählen!
Welchen Wert haben dann x, y und z?

$$
\begin{array}{c|cccc|ccc||c|c}
\hline
x_4 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 8 & \leftarrow \\
s_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & * \\
x_1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 & * \\
\hline
z & 0 & -6 & 20 & 0 & -10 & 0 & 15 & 280 & \\
\hline
 & & \uparrow & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|ccc||c|}
\hline
x_2 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 8 \\
s_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\
x_1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
z & 0 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 9 & 328 \\
\hline
\end{array}
$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^* \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = y^* \qquad z = 328 = z^*$$

d) Woran erkennen Sie, dass x und y dann optimal sind und z maximal ist?

Alle Elemente der z-Zeile sind nicht negativ.