Hochschule Ravensburg-Weingarten **02.12.2020**
Gesundheitsökonomie – 1.Semester
Übungsaufgaben zur Mathematik

Aufgabe 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Summen von je zwei dieser Matrizen und aller drei Matrizen!

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A + B + C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Bilden Sie sämtliche Produkte aus je zwei dieser Matrizen und aller drei Matrizen!

$$A*B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A*C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B*C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C*A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C*B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A*B*C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A*C*B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B*A*C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B*C*A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C*A*B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C*B*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Gegeben seien die beiden Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^4$: $x^t = (1; 0; 2; -3)$, $y^t = (1; 1; 6; 0)$
Berechnen Sie die Produkte $x^t y$ und xy^t!

$x^t * y = 1*1 + 0*1 + 2*6 + (-3)*0 = 1 + 0 + 12 + 0 = 13$

$$x*y^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 0 \\ -3 & -3 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie AA^t, A^tA, B^tB und $(E - B)^{-1}$!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A*A^t = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 19 \\ 20 & 55 & 31 \\ 19 & 31 & 30 \end{pmatrix} \quad A^t*A = \begin{pmatrix} 29 & 22 & 21 & 18 & 5 \\ 22 & 18 & 17 & 15 & 8 \\ 21 & 17 & 22 & 24 & 11 \\ 18 & 15 & 24 & 29 & 14 \\ 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

$$B*B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & 58 \end{pmatrix} \quad E - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (E - B)^{-1} = \frac{1}{21} * \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -14 & 7 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2a \\ 3a & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ b & 1 & -b \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & c \\ c & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie $A \cdot A^t$, $A^t \cdot A$, $B \cdot B^t$, $B^t \cdot B$, $C \cdot C^t$ und $C^t \cdot C$!

$$A * A^t = \begin{pmatrix} 81 + 4a^2 & 39a \\ 39a & 9a^2 + 36 \end{pmatrix} \qquad A^t * A = \begin{pmatrix} 81 + 9a^2 & 36a \\ 36a & 4a^2 + 36 \end{pmatrix}$$

$$B * B^t = \begin{pmatrix} 2 + b^2 & b - 1 - b^2 \\ b - 1 - b^2 & 2b^2 + 1 \end{pmatrix} \qquad B^t * B = \begin{pmatrix} 1 + b^2 & b - 1 & b - b^2 \\ b - 1 & 2 & -2b \\ b - b^2 & -2b & 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$C * C^t = \begin{pmatrix} 68 + c^2 & 10c + 2 & 50 \\ 10c + 2 & c^2 + 5 & 6c + 1 \\ 50 & 6c + 1 & 37 \end{pmatrix} \qquad C^t * C = \begin{pmatrix} 100 + c^2 & c + 22 & 10c \\ c + 22 & 6 & 2c + 2 \\ 10c & 2c + 2 & c^2 + 4 \end{pmatrix}$$

b) Sind die Zeilen von A bzw. B bzw. C linear unabhängig?

$\det(A) = 54 - 6a^2 = 6 * (9 - a^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 3$
Also sind die Zeilen (und Spalten) von A linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad a \neq \pm 3$

2. Zeile der Stufenform von B: $(0 \quad b + 1 \quad -b * (1 + b)) = (0 \quad 0 \quad 0) \quad \Leftrightarrow \quad b = -1$
Also sind die Zeilen von B linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad b \neq -1$

$\det(C) = c * (c - 6) - 2 * (8 - 12) = c^2 - 6c + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2 \ \vee \ c = 4$
Also sind die Zeilen (und Spalten) von C linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad c \neq 2 \ \wedge \ c \neq 4$

Aufgabe 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a^2 & a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & b & 0 \\ -15 & -5 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie die Zeilen und Spalten von A und von B auf lineare Unabhängigkeit!

Umformung von A in Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a & a^2 - a & a^2 - a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}$$

Für $a = 0$ oder $a = 1$ ist die dritte Zeile eine Nullzeile,
also sind die Zeilen für $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1$ linear unabhängig
Die Spalten sind immer linear abhängig, da A mehr Spalten hat.

$\det(B) = 15b - 75 + b * (3b - 15) = 3b^2 - 75 = 3 * (b^2 - 25) = 0$ für $\Leftrightarrow$
Also sind Zeilen und Spalten von B linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad b \neq \pm 5$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 3*(2 + 4) - 3*(2 + 5) + 3*(4 - 5) = 18 - 21 - 3 = -6$

$\det(B) = 4*(9 - 2) - 2*(-3 - 10) = 28 + 26 = 54$

C wird in Stufenform gebracht:

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Aufgabe 7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie Determinante, Rang und Inverse von A!

$\det(A) = x^2 + x*0 = x^2$ $\qquad$ $r(A) = 1$ für $x = 0$ und $r(A) = 3$ für $x \neq 0$

$$A = \frac{1}{x} * \begin{pmatrix} x & x & -x \\ -x & 1-x & x \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; x \neq 0$$

Aufgabe 8:

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme $A*x = b$ mit Hilfe der Inversen, d.h. indem Sie die Gleichung nach x auflösen, also $x = A^{-1}*b$!

a) $6x_1 + 3x_2 = 6$

$5x_1 + 2x_2 = 9$

$$x = A^{-1}*b = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 18$

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13$

$$x = A^{-1}*b = \frac{1}{11} * \begin{pmatrix} -11 & 5 & -1 \\ 11 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

Lösen Sie die beiden folgenden homogenen LGS mit dem Gauß-Algorithmus!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 128 & -128 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha * \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 10:

Lösen Sie die folgenden inhomogenen LGS mit dem Gauß-Algorithmus!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 15 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 10x_5 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 &= 25 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 9 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |*(-3) & |*(-1) \\ \quad + & \\ & \quad + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 10 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 2 \neq 3 = r(A, b) \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung} \quad (\mathbb{L} = \emptyset)$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 13x_2 + 19x_3 + 15x_4 &= 51 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 13 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= 28 \\ 2x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 &= 38 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 4 & 13 & 19 & 15 & 51 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 13 \\ 1 & 7 & 9 & 11 & 28 \\ 2 & 9 & 12 & 15 & 38 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad n = 4, \ r(A) = r(A, b) = r = 3 \quad \Rightarrow \quad n - r = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

c) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + x_6 = 20 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 1 & 20 \end{array} \quad \cong$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad n = 6, \quad r(A) = r(A, b) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad n - r = 4$$

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta * \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

d) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 37 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 51 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = b_4 \ (b_4 \in \mathbb{R}) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 18 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 37 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & 51 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \quad \cong$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & -35 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 1 \end{array}\right)$$

$n = 4$, **$b_4 \neq 1$:** $r(A) = 3 \neq 4 = r(A, b) \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

$b_4 = 1$: $r(A) = r(A, b) = r = 3 \quad \Rightarrow \quad n - r = 1$

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Aufgabe 11:</u>

Nach einigen elementaren Zeilenumformungen hat ein LGS folgendes Aussehen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & z^2 - 4 & 2z - 4 \end{array}\right)$$

Berechnen Sie die Lösung(en) für $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ und $z = -2$!

$z = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$ $n = 4$, $r(A) = r(A, b) = r = 4 \quad \Rightarrow \quad n - r = 0$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$ $n = 4$, $r(A) = r(A, b) = r = 4 \quad \Rightarrow \quad n - r = 0$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ 4 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

z = 2: $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ n = 4, r(A) = r(A, b) = r = 3 $\Rightarrow$ n – r = 1

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

z = - 2: $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$ $r(A) = 3 \neq 4 = r(A, b) \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

<u>Aufgabe 12:</u>

Ein inhomogenes LGS hat nach Umformen folgendes Aussehen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & c & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & c^2 - 1 & 0 & 1 - c \end{array}\right)$$

a) Für welche(n) Wert(e) von $c \in \mathbb{R}$ ist das LGS unlösbar?!

Die ersten beiden Zeilen sind – unabhängig von c – keine Nullzeilen.
Die 3. Zeile wird zur Nullzeile in A $\Leftrightarrow$ $c^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = \pm 1$
Damit sie auch eine Nullzeile in (A, b) ist, muss c = 1 gelten.
Ist $c = \pm 1$, aber nicht 1, dann ist sie in (A, b) keine Nullzeile.
Also ist sie für c = - 1 keine Nullzeile in (A, b) und damit ist $r(A) = 2 \neq 3 = r(A, b)$.

Fazit: für c= - 1 ist das LGS nicht lösbar.

b) Lösen Sie das LGS für c = 0 und für c = 1!

für c = 0:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 + 6 = 10$, also $x_1 = 4$ (n = 4, r(A) = r(A, b) = 3 = r $\Rightarrow$ n – r = 1)
$x_2 - 1 + 0 = 5$, also $x_2 = 6$
$x_4 = 0$, $-x_3 = 1$, also $x_3 = -1$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$x_1 - 3 + 1 = 0$, also $x_1 = 2$
$x_2 + 0 + 3 = 0$, also $x_2 = -3$
$-x_3 = 0$
$x_4 = 1$

für c = 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

n = 4, r(A) = r(A, b) = 2 = r $\Rightarrow$ n – r = 2

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$